NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

STUYVAERT

Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 455-470

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__455_0>

[$M^1 5e\delta$, $M^1 6c$, $M^2 4$]

QUADRILATÈRES DE STEINER DANS CERTAINES COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. STUYVAERT.

Le théorème célèbre énoncé par Steiner et relatif aux conditions de fermeture de certains polygones inscrits dans une cubique plane ou dans une quartique binodale a été démontré bien des fois, soit par des considérations de Géométrie synthétique, soit par l'emploi des fonctions elliptiques. D'habitude on passe de la cubique à la quartique par une transformation birationnelle et l'on n'expose guère plus que la démonstration même du théorème.

Nous nous proposons d'étudier, au moyen de l'Analyse algébrique, les quartiques binodales *quadrillées*, c'est-à-dire douées de quadrilatères de Steiner. On sait que, s'il existe un quadrilatère pareil, il en existe une infinité et nous montrerons que cette proposition est au fond identique à la suivante : une courbe rationnelle plane du second ordre ne peut dégénérer qu'en deux droites coïncidentes.

Ce sera le point de départ d'une série de propriétés des courbes ou systèmes quadrillés à deux, trois ou quatre nœuds.

Cette théorie peut être étendue aux deux courbes gauches du quatrième ordre. Enfin, dans certaines surfaces du quatrième ordre, on peut chercher les sections planes quadrillées.

COURBE PLANE RATIONNELLE DU SECOND ORDRE.

1. Les relations paramétriques

$$\rho x_i = a_i t^2 - 2 b_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

définissent une conique dans le plan des x_1, x_2, x_3. Elles donnent, en employant une notation qui s'explique d'elle-même,

$$t^2 : 2t : 1 = (xbc) : (axc) : (abx),$$

d'où l'équation ponctuelle de la courbe

$$(axc)^2 = 4(xbc)(abx).$$

Les points d'intersection de la conique avec la droite $u_x = 0$ sont déterminés par l'équation

$$t^2 u_a + 2 t u_b + u_c = 0.$$

2. Pour que la courbe dégénère, il faut qu'une certaine droite u la rencontre en une infinité de points; alors l'équation précédente est indéterminée, tous ses coefficients sont nuls, donc les relations en u_i

$$u_a = 0, \qquad u_b = 0, \qquad u_c = 0$$

sont compatibles et l'on a

$$\Delta = (abc) = 0.$$

Or, lorsque ce déterminant est nul, sans que tous ses premiers mineurs s'évanouissent, il existe *une seule* relation linéaire entre les éléments de ses lignes, donc *une seule* droite u rencontrant la courbe en une infinité de points. Et si tous les premiers mineurs de Δ sont nuls, les quantités a_i, b_i, c_i sont proportionnelles, les équations paramétriques déterminent les rapports de x_1, x_2, x_3 et ne représentent plus qu'un seul point.

Donc, *quand la courbe rationnelle dégénère, ce ne peut être qu'en deux droites coïncidentes ou en un seul point.*

Dans le premier cas, chaque point de la droite trouvée répond à deux valeurs t' et t'' du paramètre t, et l'on a

$$\frac{a_1 t'^2 + 2b_1 t' + c_1}{a_1 t''^2 + 2b_1 t'' + c_1} = \frac{a_2 t'^2 + 2b_2 t' + c_2}{a_2 t''^2 + 2b_2 t'' + c_2} = \frac{a_3 t'^2 + 2b_3 t' + c_3}{a_3 t''^2 + 2b_3 t'' + c_3}.$$

L'égalité des deux premiers rapports donne, en effectuant les calculs et divisant par $t' - t''$, généralement non nul,

$$2tt'(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (t + t')(a_1 c_2 - a_2 c_1) + 2(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0,$$

ou, en appelant A_i, B_i, C_i les premiers mineurs de Δ,

$$2C_3 tt' - B_3(t + t') + 2A_3 = 0.$$

En égalant le troisième rapport à l'un des deux premiers, on obtient les équations

$$2C_2 tt' - B_2(t + t') + 2A_2 = 0,$$
$$2C_1 tt' - B_1(t + t') + 2A_1 = 0,$$

qui sont identiques à la précédente, puisque, par hypothèse, Δ est nul et que ses mineurs A_i, B_i, C_i sont proportionnels.

Quand les équations paramétriques représentent une droite, les couples de valeurs du paramètre qui donnent un même point de la droite sont en involution.

QUADRILATÈRES DE STEINER DANS LA QUARTIQUE PLANE BINODALE.

3. Voici, précisé et complété, le cas particulier du théorème de Steiner, que nous nous proposons d'établir :

Une quartique plane binodale n'est pas, en général, *circonscrite à un quadrangle ayant deux points diagonaux aux nœuds; mais, lorsqu'il existe un quadrangle pareil, il y en a une infinité. Dans ce cas, le troisième point diagonal décrit une conique et les côtés du quadrangle qui ne passent pas par les nœuds enveloppent une courbe de quatrième classe.*

Supposons les nœuds aux sommets $x_1 x_2$ et $x_1 x_3$ du triangle de référence. L'équation de la quartique est de la forme

$$\begin{aligned}\varphi = x_3^2(a_1 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2)&\\ + 2x_3 x_1(a_2 x_2^2 + 2b_2 x_2 x_1 + c_2 x_1^2)&\\ + x_1^2(a_3 x_2^2 + 2b_3 x_2 x_1 + c_3 x_1^2) &= 0,\end{aligned}$$

ou, en posant $x_2 = \xi x_1$, $x_3 = \eta x_1$,

$$\begin{aligned}\varphi = \eta^2(a_1\xi^2 + 2b_1\xi + c_1)&\\ + 2\eta(a_2\xi^2 + 2b_2\xi + c_2) + (a_3\xi^2 + 2b_3\xi + c_3) &= 0:\end{aligned}$$

Pour qu'il existe un quadrangle inscrit dont deux points diagonaux soient aux nœuds, il faut que, pour deux valeurs, ξ_1 et ξ_2, de ξ, on ait les mêmes valeurs de η; il faut donc que les relations ci-après soient compatibles en ξ_1 et ξ_2 :

$$\frac{a_1\xi_1^2 + 2b_1\xi_1 + c_1}{a_1\xi_2^2 + 2b_1\xi_2 + c_1} = \frac{a_2\xi_1^2 + 2b_2\xi_1 + c_2}{a_2\xi_2^2 + 2b_2\xi_2 + c_2} + \frac{a_3\xi_1^2 + 2b_3\xi_1 + c_3}{a_3\xi_2^2 + 2b_3\xi_2 + c_3}.$$

Considérons, dans un autre plan, trois coordonnées homogènes X_1, X_2, X_3, liées à un paramètre ξ par les égalités

$$\rho X_i = a_i\xi^2 + 2b_i\xi + c_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Elles définissent une courbe rationnelle du second ordre qui, d'après les conditions précédentes, doit avoir un point double, donc dégénérer. Cette circonstance se réalise quand on a

$$\Delta \equiv (abc) = 0.$$

Alors la conique a une infinité de points doubles et les couples de valeurs de ξ qui donnent un même point double forment une involution, représentée par une des trois égalités suivantes, équivalentes entre elles,

$$2A_i - B_i(\xi_1 + \xi_2) + 2C_i\xi_1\xi_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Par suite, si la quartique binodale possède un quadrangle inscrit, on a $\Delta = 0$; elle possède donc une infinité de quadrangles inscrits dont les couples de côtés passant par le nœud $x_1 x_2$ sont en involution; et cette involution est représentée par une des égalités ci-dessus ou par

$$2A_i x'_1 x''_1 - B_i(x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + 2C_i x'_2 x''_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De même les couples de côtés passant par $x_1 x_3$ forment une involution représentée par une des équations suivantes, équivalentes entre elles :

$$2A_1 x'_1 x''_1 - A_2(x'_1 x''_3 + x'_3 x''_1) + 2A_3 x'_3 x''_3 = 0,$$
$$2B_1 x'_1 x''_1 - B_2(x'_1 x''_3 + x'_3 x''_1) + 2B_3 x'_3 x''_3 = 0,$$
$$2C_1 x'_1 x''_1 - C_2(x'_1 x''_3 + x'_3 x''_1) + 2C_3 x'_3 x''_3 = 0.$$

4. Avant de poursuivre la démonstration du théorème du numéro précédent, faisons quelques remarques.

Le déterminant Δ étant nul, il existe une relation linéaire entre les polynomes

$$a_i x_2^2 + 2b_i x_2 x_1 + c_i x_1^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

figurant dans l'équation $\varphi = 0$. L'évanouissement de ces polynomes représente donc trois couples de la première involution trouvée ci-dessus. De même on peut ordonner φ par rapport à x_2 et l'on trouve que

$$a_1 x_3^2 + 2 a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1^2 = 0,$$
$$b_1 x_3^2 + 2 b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1^2 = 0,$$
$$c_1 x_3^2 + 2 c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1^2 = 0$$

représentent trois couples de la seconde involution.

Pour la simplicité nous dirons que la courbe φ est *quadrillée* quand elle est circonscrite à des quadrangles ayant deux points diagonaux aux nœuds. La remarque précédente donne alors l'énoncé que voici :

Soient une quartique binodale φ, la première polaire d'un de ses nœuds et le couple de tangentes en ce nœud ; ces trois figures sont coupées par une droite quelconque, issue du second point double, en trois couples de points (autres que les nœuds). Si ces trois couples de points sont en involution, il en est de même des trois couples de points analogues obtenus en intervertissant les rôles des points doubles. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la courbe φ est quadrillée.

Voici encore un corollaire évident :

Si la courbe φ est quadrillée, toutes les droites issues d'un nœud la coupent en des couples de points qui sont projetés de l'autre nœud suivant des couples de rayons en involution. Réciproquement, si trois couples de rayons pareils, issus d'un même nœud, sont en involution, tous le sont, aussi bien pour l'un que pour l'autre nœud, et la courbe est quadrillée.

Un élément double d'une involution correspond à des tangentes issues de l'autre nœud et donne un quadrangle réduit à un segment de droite. Ainsi, *pour qu'une courbe φ soit quadrillée, il faut et il suffit que* *les contacts de deux tangentes issues de l'un des nœuds soient alignés sur l'autre.*

Soit, pour fixer les idées,

$$\begin{aligned} & a_3 x_2^2 + 2 b_3 x_2 x_1 + c_3 x_1^2 . \\ & \equiv \lambda (a_1 x_2^2 + 2 b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2) + \mu (a_2 x_2^2 + 2 b_2 x_2 x_1 + c_2 x_1^2) \end{aligned}$$

la relation identique qui lie trois couples de l'involution en x_2, x_1. L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\begin{aligned} \varphi \equiv & (a_1 x_2^2 + 2 b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2)(x_3^2 + \lambda x_1^2) \\ & + (a_2 x_2^2 + 2 b_2 x_2 x_1 + c_2 x_1^2)(2 x_3 x_1 + \mu x_1^2) \\ \equiv & \begin{vmatrix} a_1 x_2^2 + 2 b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 & a_2 x_2^2 + 2 b_2 x_2 x_1 + c_2 x_1^2 \\ -(2 x_3 x_1 + \mu x_1^2) & x_3^2 + \lambda x_1^2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, l'évanouissement d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2) \\ \varphi_1(x_1, x_3) & \varphi_2(x_1, x_3) \end{vmatrix}$$

où les f et les φ sont des formes quadratiques, représente une quartique binodale quadrillée. Car les quatre points communs aux deux couples de droites

$$f_1 + k f_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k \varphi_2 = 0$$

vérifient l'équation de la courbe et, quel que soit k, ce sont les sommets d'un quadrangle ayant deux points diagonaux aux nœuds. Donc, *pour qu'une quartique binodale soit quadrillée, il faut et il suffit que le premier membre de son équation puisse se mettre sous forme d'un déterminant de quatre fonctions quadratiques, où x_3 manque dans une ligne et x_2 dans l'autre.* Il en résulte aussi que *les deux involutions sont projectives.*

5. Passons à la recherche du lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits : nous venons de voir

que les couples de côtés opposés d'un quadrangle sont

$$f_1 + kf_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k\varphi_2 = 0.$$

Un des côtés du triangle diagonal est $x_1 = 0$; les autres sont respectivement les droites polaires du nœud $x_1 x_3$ par rapport au couple de droites $f_1 + kf_2$ et du nœud $x_1 x_2$, par rapport au couple de droites $\varphi_1 + k\varphi_2$; les équations de ces polaires sont

$$\frac{df_1}{dx_2} + k\frac{df_2}{dx_2} = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx_3} + k\frac{d\varphi_2}{dx_3} = 0,$$

et leur intersection (troisième point diagonal) décrit la conique

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_2} & \dfrac{df_2}{dx_2} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_3} & \dfrac{d\varphi_2}{dx_3} \end{vmatrix} \equiv \frac{d^2\varphi}{dx_2\,dx_3} = 0.$$

Le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits dans la quartique quadrillée φ est la conique polaire de l'un des nœuds par rapport à la cubique polaire de l'autre.

Cette conique a pour équation développée

$$a_1 x_3 x_2 + b_1 x_3 x_1 + a_2 x_2 x_1 + b_2 x_1^2 = 0.$$

Si l'on calcule son discriminant, on trouve

$$-a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad \text{ou} \quad -a_1 C_3.$$

La courbe dégénère si l'on a

$$a_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad C_3 = 0.$$

Dans le premier cas, la quartique φ se décompose en une droite x_1 et une cubique. Écartons provisoirement cette hypothèse. La propriété de la conique $\dfrac{d^2\varphi}{dx_2\,dx_3}$ de se réduire à deux droites est indépendante du choix du triangle fondamental; mais l'équation $\varphi = 0$ ne conserve la même forme que si deux des sommets de ce triangle sont aux nœuds. La quantité C_3 est donc invariante pour les transformations de coordonnées qui déplacent le sommet $x_2 x_3$. Nous supposerons d'abord C_3 non nul; le cas de $C_3 = 0$ sera examiné plus tard.

6. Avant d'étudier l'enveloppe des côtés des quadrangles qui ne passent pas par les nœuds (dans l'hypothèse $C_3 \gtrless 0$), il convient d'examiner la correspondance entre les sommets opposés des quadrangles.

Les équations des involutions en x_2, x_1 et x_3, x_1 peuvent s'écrire, par exemple, sous la forme suivante, trouvée au n° 3 :

$$2 A_3 x'_1 x''_1 - B_3 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + 2 C_3 x'_2 x''_2 = 0,$$
$$2 C_1 x'_1 x''_1 - C_2 (x'_1 x''_3 + x'_3 x''_1) + 2 C_3 x'_3 x''_3 = 0.$$

De ces relations on peut tirer les coordonnées du sommet x' proportionnelles à des fonctions quadratiques des coordonnées du sommet opposé x'' ou inversement. Donc, *les sommets opposés des quadrangles se correspondent dans une transformation birationnelle quadratique.*

Puisque C_3 n'est pas nul, les équations précédentes définiront une simple *inversion* si l'on déplace le sommet $x_2 x_3$ du triangle de référence de manière à annuler B_3 et C_2, ce qui revient à prendre pour côtés x_2 et x_3 du triangle de référence les rayons conjugués de x_1 dans les deux involutions.

Supposons que cette transformation ait été faite et que les deux involutions soient désormais représentées par

$$x'_2 x''_2 = c x'_1 x''_1, \qquad x'_3 x''_3 = a x'_1 x''_1.$$

Leurs rayons doubles ont pour équations

$$x_2 = \pm x_1 \sqrt{c}, \qquad x_3 = \pm x_1 \sqrt{a},$$

et l'on voit facilement que les couples de ces involutions se représentent par les équations suivantes où λ et μ sont des paramètres variables :

$$x_2^2 + c x_1^2 - \lambda x_2 x_1 = 0, \qquad x_3^2 + a x_1^2 - \mu x_3 x_1 = 0.$$

Ces deux involutions étant projectives, on a, par exemple,

$$\lambda\mu + 2n\lambda + 2m\mu + 4b = 0.$$

L'élimination de λ et μ donne l'équation de la courbe rapportée au triangle fondamental de l'inversion

$$\begin{aligned}\varphi \equiv (x_2^2 + c x_1^2)(x_3^2 + a x_1^2) &+ 2m(x_2^2 + c x_1^2) x_3 x_1 \\ &+ 2m(x_3^2 + a x_1^2) x_2 x_1 + 4 b x_3 x_2 x_1^2 = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\varphi \equiv\ & x_3^2 (x_2^2 + 2m x_2 x_1 + c x_1^2) \\ & + 2 x_3 x_1 (n x_2^2 + 2b x_2 x_1 + nc x_1^2) \\ & + x_1^2 (a x_2^2 + 2ma x_2 x_1 + ac x_1^2) = 0.\end{aligned}$$

Dans une quartique binodale quadrillée, les sommets opposés d'un quadrangle sont des points homologues d'une inversion trilinéaire dont les points fondamentaux sont les points diagonaux du quadrangle déterminé par les intersections des rayons doubles des deux involutions.

7. Pour obtenir l'enveloppe des côtés des quadrangles inscrits nous allons résoudre d'abord ce problème d'algèbre : *eliminer λ entre les relations*

$$\frac{a_1 + b_1\lambda}{c_1 + d_1\lambda} = \frac{a_2 + b_2\lambda}{c_2 + d_2\lambda} = \frac{a_3 + b_3\lambda}{c_3 + d_3\lambda}.$$

Représentons chacun de ces rapports par $-\rho$, il faut donc que les trois relations

$$a_i + b_i\lambda + c_i\rho + d_i\lambda\rho = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

soient compatibles en λ et ρ; multiplions-les par ρ : nous aurons six équations non homogènes en λ, ρ, $\lambda\rho$, ρ^2, $\lambda\rho^2$, et l'élimination de ces cinq quantités conduit à l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i & . & . \\ . & . & a_i & b_i & c_i & d_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pour que les deux relations proposées en λ aient *deux* racines communes, il faut que les équations

$$a_i + b_i\lambda + c_i\rho + d_i\lambda\rho = 0$$

soient vérifiées par deux systèmes de valeurs de λ et ρ. En coordonnées cartésiennes λ, ρ, elles représentent trois hyperboles ayant les mêmes directions asymptotiques; pour qu'elles aient encore deux points communs, ils faut qu'elles fassent partie d'un même faisceau ou que l'on ait

$$\| a_i \quad b_i \quad c_i \quad d_i \| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ces problèmes préliminaires étant résolus, revenons à la courbe quadrillée φ rapportée aux trois points fondamentaux de l'inversion. Son équation est

$$x_3^2(x_2^2 + 2mx_2x_1 + cx_1^2) + 2x_3x_1(nx_2^2 + 2bx_2x_1 + ncx_1^2) + x_1^2(ax_2^2 + 2max_2x_1 + acx_1^2) = 0,$$

et l'on a supposé que le mineur du déterminant Δ relatif au dernier élément, donc ici $b - mn$, n'était pas nul. L'équation peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_3^2 + ax_1^2 & -2x_3x_1 \\ nx_2^2 + 2bx_2x_1 + ncx_1^2 & x_2^2 + 2mx_2x_1 + cx_1^2 \end{vmatrix} = 0;$$

elle montre que les involutions projectives peuvent s'écrire

$$x_3^2 + a x_1^2 - 2\lambda x_3 x_1 = 0,$$
$$x_2^2(n+\lambda) + 2x_2x_1(b+m\lambda) + cx_1^2(n+\lambda) = 0,$$

une même valeur de λ donnant des couples correspondants des involutions.

Une droite u donnée par l'équation

$$x_3 = -\frac{u_2x_2 + u_1x_1}{u_3}$$

coupe la première involution en des couples de points qui, projetés du nœud x_1x_2, donnent cette troisième involution

$$u_2^2x_2^2 - 2x_2x_1(u_2u_1 + \lambda u_2u_3) + x_1^2(u_1^2 + au_3^2 - 2\lambda u_1u_3) = 0.$$

Pour que la droite u soit diagonale d'un quadrangle inscrit, il faut que la seconde et la troisième involution aient un couple commun, correspondant à une même valeur de λ, donc que l'on ait

$$\frac{u_2^2}{n+\lambda} = \frac{u_1u_2 + \lambda u_2u_3}{b+m\lambda} = \frac{u_1^2 + au_3^2 - 2\lambda u_1u_3}{c(n+\lambda)}.$$

L'élimination de λ, comme nous venons de l'effectuer, donne ce résultat

$$\begin{vmatrix} u_2^2 & 0 & n & 1 & . & . \\ u_1u_3 & u_2u_3 & b & m & . & . \\ u_1^2 + au_3^2 & 2u_1u_3 & nc & c & . & . \\ \dots & \dots & u_2^2 & 0 & n & 1 \\ \dots & \dots & u_1u_2 & u_2u_3 & b & m \\ \dots & \dots & u_1^2 + au_3^2 & 2u_1u_3 & nc & c \end{vmatrix} = 0.$$

En développant par le théorème de Laplace, et supprimant le facteur $(b - mn)u_2 u_3$, il vient

$$\begin{aligned} &u_1^4 - 2u_1^3(mu_2 + nu_3) + 4bu_1^2 u_2 u_3 \\ &\quad + u_1(cu_2^2 - au_3^2)(mu_2 - nu_3) - (cu_2^2 - au_3^2)^2 = 0, \end{aligned}$$

équation tangentielle d'une courbe de quatrième classe.

Pour que la droite u soit diagonale de deux quadrangles, il faut que les deux équations en λ écrites en dernier lieu aient deux racines communes; donc, d'après le problème préliminaire, il faut que l'on ait

$$\left\| \begin{matrix} u_2^2 & 0 & n & 1 \\ u_1 u_2 & u_2 u_3 & b & m \\ u_1^2 + a u_3^2 & 2u_1 u_3 & nc & c \end{matrix} \right\| = 0.$$

En omettant la seconde ou la première colonne on a respectivement

$$cu_2^2 - au_3^2 - u_1^2 = 0, \qquad 2u_1 u_3(b - mn) = 0.$$

Par hypothèse, $b - mn$ n'est pas nul; on a supposé u_3 différent de zéro, puisque l'on a, ci-dessus, divisé par u_3, donc

$$u_1 = 0, \qquad cu_2^2 - au_3^2 = 0$$

représentent deux droites qui sont à la fois diagonales de deux quadrangles inscrits, et, par suite, tangentes doubles à l'enveloppe.

Pour une de ces droites, les seconde et troisième involutions considérées précédemment ont deux couples communs, par suite tous leurs couples communs, et aussi mêmes éléments doubles. Ceci explique pourquoi chacune des tangentes singulières,

$$u_1 = 0, \qquad u_2 : u_3 = \pm\sqrt{a} : \sqrt{c},$$

est diagonale du quadrilatère formé par les rayons doubles de la première et de la seconde involution.

L'enveloppe des côtés des quadrangles inscrits qui ne passent pas par les nœuds est une courbe de quatrième classe ayant pour tangentes doubles les diagonales du quadrilatère formé par les rayons doubles des involutions des côtés opposés des quadrangles inscrits.

Toutefois, bien que, pour l'une des tangentes singulières, la seconde et la troisième involution ont tous leurs couples communs, elles n'ont que deux couples communs correspondant à la même valeur de λ; ces valeurs de λ s'obtiennent en faisant

$$u_1 = 0, \qquad u_2 : u_3 = \pm\sqrt{a} : \sqrt{c}$$

dans l'une des relations

$$\frac{u_2^2}{n+\lambda} = \frac{u_1 u_2 + \lambda u_2 u_3}{b + m\lambda} = \frac{u_1^2 + a u_3^2 + 2\lambda u_1 u_3}{c(n+\lambda)},$$

par exemple dans la première : on obtient successivement

$$a(b + m\lambda) = \pm\sqrt{ac}(n+\lambda)\lambda,$$

$$\pm\lambda^2\sqrt{c} + \lambda(\pm n\sqrt{c} - m\sqrt{a}) - b\sqrt{a} = 0.$$

Les deux valeurs de λ coïncident, pour l'une ou l'autre des tangentes singulières, si l'on a

$$\begin{aligned}(\pm n\sqrt{c} - m\sqrt{a})^2 &\pm 4b\sqrt{ac}\\ &= am^2 + cn^2 \pm 2\sqrt{ac}(2b - mn) = 0.\end{aligned}$$

Pour que les valeurs de λ coïncident pour les deux tangentes singulières, c'est-à-dire pour qu'elles soient toutes deux inflexionnelles, il faut que

$$am^2 + cn^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2b - mn = 0.$$

Quand une courbe de quatrième classe a deux tangentes doubles, elle est en général du huitième ordre. Cet ordre s'abaisse d'une ou de deux unités quand une ou deux tangentes doubles deviennent inflexionnelles; comme on vient de le voir, cette circonstance peut se réaliser sans que l'on renonce à l'hypothèse $b \gtrless mn$.

L'enveloppe des côtés des quadrangles inscrits dans la quartique quadrillée est une courbe du huitième ordre qui peut s'abaisser au septième ou au sixième ordre.

8. Reprenons la première équation de la quartique quadrillée

$$\begin{aligned}\varphi \equiv x_3^2(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) \\ + 2x_3x_1(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) \\ + x_1^2(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0.\end{aligned}$$

Nous supposons encore $a_1 \gtrless 0$; mais, par contre, le mineur C_3 de $\Delta \equiv (abc)$ ou $a_1b_2 - a_2b_1$ est à présent nul.

Nous pouvons toujours, et d'une seule manière, déplacer le sommet x_2x_3 du triangle de référence de telle sorte que les coefficients a_2 et b_1 s'annulent, car la transformation des coordonnées remplace ces coefficients a_2 et b_1 par des fonctions linéaires des paramètres de la transformation. Ayant donc

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_3 = b_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 \gtrless 0,$$

on doit avoir aussi

$$b_2 = 0,$$

et le déterminant Δ se réduit à

$$-b_1b_3c_2.$$

Par suite, pour que la courbe φ soit quadrillée, il faut que c_2 ou b_3 soit nul. L'équation se réduit à l'une des formes

$$x_3^2\,\chi(x_1, x_2) + x_1^2\,\psi(x_1, x_2) = 0,$$

$$x_2^2\,\chi_1(x_1, x_3) + x_1^2\,\psi_1(x_1, x_3) = 0.$$

Dans le premier de ces cas, chacune des droites $\chi(x_1, x_2) = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus au sommet $x_1 x_2$; et ce sommet est alors un point double d'inflexion; dans le second cas, c'est le second sommet qui présente cette singularité. Il suffit évidemment de considérer un de ces cas.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats que l'on obtient en appliquant les méthodes des numéros précédents.

Lorsque, dans une quartique binodale quadrillée, un des nœuds est un point double d'inflexion, le troisième point diagonal des quadrangles inscrits décrit une droite, les sommets opposés de ces quadrangles se correspondent dans une semi-inversion trilinéaire, et leurs diagonales enveloppent une courbe de troisième classe.

Remarquons que, *si l'une des branches de la courbe passant par un point double y présente une inflexion et si la courbe est quadrillée, la seconde branche a aussi une inflexion en ce point;* car les quatre tangentes issues du nœud considéré ont leurs contacts alignés deux à deux sur l'autre nœud; si donc un de ces contacts s'approche indéfiniment du premier nœud, il en est de même d'un autre de ces contacts.

(*A suivre.*)