G. FONTENÉ

Décomposition d'une correspondance tangentielle entre deux courbes unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 433-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__433_0>

[M¹2h]

DÉCOMPOSITION D'UNE CORRESPONDANCE TANGENTIELLE ENTRE DEUX COURBES UNICURSALES;

Par M. G. FONTENÉ.

Ce Mémoire est indépendant de celui qui a paru ailleurs [1] pour le cas de deux courbes de genres p et p'; l'hypothèse que les deux courbes sont unicursales conduit naturellement à des résultats plus nets, qui s'obtiennent par un traitement plus simple. Je signalerai en particulier le théorème donné au n° 12.

I.

1. Soient deux variables t et t' liées par une relation algébrique $F(t, t') = 0$, du degré n en t, du degré m' en t'; une valeur de t' donne n valeurs pour t, une valeur de t donne m' valeurs pour t', et l'on dit que les deux variables ont une correspondance algébrique (n, m'); on peut représenter la relation $F = 0$ par une courbe F, qui est d'ordre $n + m'$, avec un point multiple d'ordre m' à l'infini sur l'axe des t, un point multiple d'ordre n à l'infini sur l'axe des t'. Lorsque, pour une certaine valeur de l'une des variables, deux des valeurs de l'autre variable sont égales, on dit qu'il y a pour celle-ci une *coïncidence*. Le nombre des coïncidences de deux valeurs de t (tangentes parallèles à

(1) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV.

l'axe des t) est

$$m' \times 2(n-1),$$

comme on peut le voir en appliquant le principe de correspondance de Chasles à la correspondance qui lie deux valeurs de t répondant à une même valeur de t'; le nombre des coïncidences de deux valeurs de t' est de même

$$n \times 2(m'-1);$$

lorsque simultanément, pour une solution (t, t'), t' donne deux t coïncidents et inversement, auquel cas nous dirons qu'il y a *coïncidence simultanée*, la courbe F a un point double correspondant.

2. *Pour qu'une correspondance* (n, m') *se décompose en deux correspondances* (α, α') *et* (β, β'), *avec*

$$\alpha + \beta = n, \qquad \alpha' + \beta' = m',$$

il faut des conditions en nombre

$$c = \alpha\beta' + \beta\alpha'; \tag{1}$$

le nombre des paramètres dont dépend la correspondance (n, m') la plus générale est en effet

$$(n+1)(m'+1) - 1 \quad \text{ou} \quad nm' + n + m',$$

et il suit de là que le nombre des conditions pour la décomposition est

$$(nm' + n + m') - (\alpha\alpha' + \alpha + \alpha') - (\beta\beta' + \beta + \beta')$$

ou

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') - \alpha\alpha' - \beta\beta'$$

ou

$$\alpha\beta' + \beta\alpha'.$$

Quelles sont ces conditions?

Le fait de coïncidences SIMULTANÉES *signalé au n° 1 doit se produire un nombre de fois égal à* $\alpha\beta' + \beta\alpha'$ *ou c.*

En effet, cela revient à dire que la courbe F doit avoir à distance finie ce nombre de points doubles; or, les deux courbes qui doivent la composer auront à distance finie des points d'intersection dont le nombre est

$$(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') - \alpha\beta - \alpha'\beta' \quad \text{ou} \quad \alpha\beta' + \beta\alpha'.$$

En ce qui concerne les coïncidences pour la variable t, par exemple, il y a naturellement $\alpha' \times 2(\alpha - 1)$ coïncidences où les deux valeurs de t qui coïncident appartiennent à la correspondance (α, α'), il y en a $\beta' \times 2(\beta - 1)$ où les deux valeurs de t qui coïncident appartiennent à la correspondance (β, β'), et les coïncidences restantes (qui doivent être comptées deux fois) sont celles où *l'une des deux valeurs coïncidentes de t appartient à la correspondance* (α, α'), *tandis que l'autre appartient à la correspondance* (β, β'); on peut suivre ces faits sur la courbe F décomposée; on a l'égalité

$$\alpha' \times 2(\alpha - 1) + \beta' \times 2(\beta - 1) + 2(\alpha\beta' + \beta\alpha') = m' \times 2(n - 1).$$

Pour $\alpha = 1$, le nombre $\alpha' \times 2(\alpha - 1)$ est nul, une correspondance $(1, \alpha')$ ne pouvant donner lieu à une coïncidence de deux valeurs de t; pour $\beta = 1$, on a un fait analogue. Nous reviendrons plus loin sur le cas $n = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

On obtient directement comme il suit le nombre $\alpha\beta' + \beta\alpha'$, qui s'est présenté ci-dessus comme le résultat d'un calcul. A une valeur t_1 de t répondent, dans la correspondance (α, α'), α' valeur de t', dont chacune fournit, dans la correspondance (β, β'), β valeurs t_2 de t; une valeur de t_1 donne ainsi $\alpha'\beta$ valeurs de t_2, et inversement une valeur de t_2 donne $\beta'\alpha$ valeurs de t_1; la correspondance entre t_1 et t_2 est donc une correspondance $(\alpha'\beta, \beta'\alpha)$ admettant des coïncidences en nombre $\alpha\beta' + \beta\alpha'$, et ces coïncidences sont bien celles que l'on a en vue.

Mais l'existence de coïncidences simultanées en nombre $c = \alpha\beta' + \beta\alpha'$ ne suffit pas en général pour assurer la décomposition, bien que c soit le nombre des conditions requises pour cette décomposition.

Voici un cas où la décomposition est assurée. Soit une courbe d'ordre $m = p + q$; elle se décompose *à coup sûr* si elle a des points doubles en nombre

$$\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + 1$$

ou

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(q-1)(q-2)}{2} + pq,$$

c'est-à-dire si le nombre de ses points doubles est égal au nombre maximum des points doubles de deux courbes de degré p et q ($p + q$ étant égal à m), augmenté du nombre de leurs points d'intersection ([1]). Dans le cas qui nous occupe, la courbe F a par hypothèse :

A l'infini sur l'axe des t', l'équivalent de points doubles en nombre

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2} + \alpha\beta,$$

à l'infini sur l'axe des t, l'équivalent de points doubles

([1]) L'introduction des nombres p et q a pour but d'obtenir un calcul simple; elle n'est nullement essentielle, la somme $p + q$ fonctionnant seule.

en nombre

$$\frac{(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'-1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha'(\alpha'-1)}{2}+\frac{\beta'(\beta'-1)}{2}+\alpha'\beta',$$

à distance finie des points doubles en nombre

$$\alpha\beta'+\beta\alpha';$$

à cause de

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha\beta'+\beta\alpha'=(\alpha+\alpha')(\beta+\beta'),$$

la décomposition est assurée si

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+\frac{\alpha'(\alpha'-1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\beta(\beta-1)}{2}+\frac{\beta'(\beta'-1)}{2}$$

sur les nombres maximum de points doubles de deux courbes d'ordre $\alpha+\alpha'$ et $\beta+\beta'$, c'est-à-dire si l'on a

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha'(\alpha'-1)=(\alpha+\alpha'-1)(\alpha+\alpha'-2), \qquad \ldots$$

ou

$$(\alpha-1)(\alpha'-1)=0, \qquad (\beta-1)(\beta'-1)=0.$$

On peut avoir $\alpha=1$, $\beta'=1$, de sorte que *la décomposition*

$$(n, m')=(1, m'-1)+(n-1, 1)$$

est assurée par des coïncidences simultanées en nombre

$$1+(n-1)(m'-1).$$

On peut avoir $\alpha=1$, $\beta=1$, de sorte que *la décomposition*

$$(2, m')=(1, \alpha')+(1, \beta')$$

est assurée par des coïncidences simultanées en nombre m', mais α' et β', simplement astreints à avoir pour somme m', ne sont déterminés que dans les deux cas $m'=2$, $m'=3$.

Voici la remarque annoncée plus haut relativement à ce cas. Comme on a $\alpha = 1$, $\beta = 1$, les seules coïncidences possibles, en ce qui concerne la variable t, sont ici des coïncidences où l'une des valeurs de t appartient à la correspondance $(1, \alpha')$, tandis que l'autre appartient à la correspondance $(1, \beta')$; la formule écrite plus haut se réduit alors à

$$2c = 2m' \quad \text{ou} \quad c = m'.$$

Ainsi, pour $\alpha = 1$, $\beta' = 1$, le résultat est bien net. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, les c coïncidences simultanées assurent la décomposition, mais elles peuvent avoir lieu de diverses façons auxquelles correspondent des décompositions différentes. En général, les c coïncidences simultanées n'assurent la décomposition, et telle ou telle décomposition, que si elles ont lieu d'une certaine façon : le sens de cette expression est précisé par l'exemple suivant.

3. Pour le cas particulier où l'une des deux correspondances composantes doit être doublement linéaire, on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Pour qu'une correspondance* (n, m') *entre deux variables* t *et* t' *se décompose en deux correspondances dont l'une soit une correspondance doublement linéaire*

$$(n, m') = (1, 1) - (n-1)(m'-1),$$

il doit exister, en nombre

$$c_1 = n + m' - 2, \tag{2}$$

des coïncidences simultanées de deux valeurs de t *et de deux valeurs de* t'. *Si* n *ou* m' *a la valeur* 2, *cela* *suffit. Si l'on a*

$$n \gtreqless 3, \qquad m' \gtreqless 3,$$

les $n + m' - 2$ couples de valeurs doubles de t et t' doivent satisfaire à une même relation homographique, ou encore le rapport anharmonique de quatre quelconques des valeurs doubles de t doit être égal à celui des quatre valeurs doubles correspondantes de t'; cela n'augmente d'ailleurs pas le nombre des conditions si l'on appelle CONDITION NOUVELLE *une égalité nouvelle qui doit avoir lieu, et non une égalité qui se trouve résulter d'égalités précédentes en vertu d'un choix fait entre divers cas possibles.*

Pour $n = 2$ ou $m' = 2$, le théorème résulte de ce qu'on a vu plus haut. Pour $n \gtreqless 3$, $m' \gtreqless 3$, les conditions indiquées sont certainement nécessaires, puisque les $n + m' - 2$ points doubles accidentels de la courbe F doivent appartenir à une courbe $F_{11} = 0$. Elles sont suffisantes ; supposons en effet que la courbe F ait à distance finie $n + m' - 2$ (au moins 4) points doubles appartenant à une courbe $F_{11} = 0$; si celle-ci ne faisait pas partie de la courbe F, elle la couperait à distance finie en des points au nombre de $2(n + m' - 2)$; or elle ne peut la couper qu'en $n + m'$ points, nombre inférieur au précédent, puisque la différence

$$2(n + m' - 2) - (n + m') \quad \text{ou} \quad n + m' - 4$$

est au moins égale à 2. Le théorème est donc démontré. [On peut observer que, pour $n + m' = 5$, la courbe F_{11} qui passe par les trois points doubles est encore déterminée. Pour $n + m' = 4$, il n'y a plus que deux points doubles à distance finie ; la quartique $F_{22} = 0$ se décompose en deux hyperboles $F_{11} = 0$, $F'_{11} = 0$, qui se coupent à distance finie aux deux points doubles.]

II.

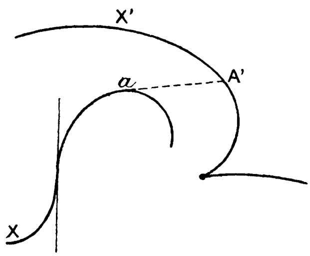
4. Lorsqu'une courbe est représentée paramétriquement, comme il arrivera dans ce qui suit, une valeur du paramètre ne détermine pas seulement un point si l'on se sert de coordonnées ponctuelles, une tangente si l'on se sert de coordonnées tangentielles, mais bien l'ensemble d'un point de la courbe et de la tangente en ce point, ensemble que l'on peut appeler un *élément* de la courbe. Si la courbe est donnée par les coordonnées de ses points, fonctions d'un paramètre, un point nodal donne lieu à deux valeurs du paramètre attachées aux deux éléments correspondants; mais un point de rebroussement donne lieu à une valeur unique du paramètre, et *une droite passant par un point de rebroussement se présente alors comme une tangente parasite de la courbe;* si l'on complète la courbe par des points (classe 1) placés aux points de rebroussement, la classe de la courbe complétée est

$$N = n + \varkappa = 2(m + p - 1),$$

p étant le genre de la courbe, et la simplicité de l'expression $2(m + p - 1)$ est un fait digne de remarque. Si la courbe est donnée par les coordonnées de ses tangentes, fonctions d'un paramètre, une bitangente donne lieu à deux valeurs du paramètre attachées aux deux éléments correspondants; mais une tangente d'inflexion donne lieu à une valeur unique du paramètre, et *un point situé sur une tangente d'inflexion se présente alors comme un point parasite de la courbe;* si l'on complète la courbe par des droites (ordre 1) placées sur les tangentes d'inflexion, l'ordre de la courbe complétée est

$$M = m + \iota = 2(n + p - 1).$$

5. **Soient deux courbes *unicursales*, l'une X dont on considérera les tangentes a et qui sera de classe n,** l'autre X′ dont on considérera les points A′ et qui sera d'ordre m'. Pour la première, les coordonnées u, v, w d'une tangente a sont égales à des polynomes entiers en t de degré n; pour la seconde, les coordonnées x', y', z' d'un point A′ sont égales à des polynomes entiers en t' de degré m'. La courbe X sera complétée au point de vue ponctuel (droites, ordre 1, sur les tangentes d'inflexion), la courbe X′ sera complétée au point de



vue tangentiel (points, classe 1, aux points de rebroussement); l'ordre de X complétée, la classe de X′ complétée sont respectivement

$$M = m + \iota = 2(n - 1), \qquad N' = n' + \varkappa' = 2(m' - 1).$$

Nous ferons correspondre les éléments (a, A) *de la courbe* X *et les éléments* (A', a') *de la courbe* X′ *par la condition que la tangente a passe au point* A′ : cette *correspondance tangentielle* est une correspondance (n, m'), exprimée par la relation

$$ux' + vy' + wz' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{F}(t, t') = 0.$$

Les points A′ de la courbe X′ qui donnent lieu à une coïncidence de deux éléments (a, A) sur la courbe X sont les points communs à X′ et à X complétée (si A' est un point d'intersection de X' avec une tangente d'inflexion de X, et si A'_1 est un point de X' infiniment voisin de A', deux des tangentes menées de A'_1 à X sont infiniment voisines et ont leurs points de contact infiniment voisins); le nombre de ces points est

$$m' \times M \quad \text{ou} \quad m' \times 2(n-1),$$

et ce résultat est conforme à ce qu'on a vu au n° 1. De même, les tangentes a à la courbe X qui donnent lieu à une coïncidence de deux éléments (A', a') sur la courbe X' sont les tangentes communes à X et à X' complétée; leur nombre est

$$n \times X' \quad \text{ou} \quad n \times 2(m'-1).$$

Un contact des deux courbes complétées donne deux coïncidences simultanées, c'est-à-dire donne simultanément deux éléments (a, A) coïncidents si l'on part de A', deux éléments (A', a') coïncidents si l'on part de a; on dira que le contact est *singulier* si une tangente d'inflexion de X touche X', si un point de rebroussement de X' est sur X, si une tangente d'inflexion de X passe par un point de rebroussement de X'.

6. *Pour que la correspondance tangentielle* (n, m') *se décompose en deux correspondances* (α, α') *et* (β, β'), *il faut, d'après ce qu'on a vu, que les deux courbes complétées aient des contacts en nombre*

$$c = \alpha\beta' + \beta\alpha';$$

mais cela ne suffit pas, bien que ce nombre soit celui des conditions requises pour la décomposition; les contacts doivent avoir lieu d'une certaine façon, si l'on peut ainsi parler, et les exemples que l'on trouvera plus loin éclaireront ce point délicat.

Si A′ est un point d'intersection des deux courbes complétées, les deux éléments (a, A) qui coïncident appartiennent tous deux à la correspondance (α, α') ou tous deux à la correspondance (β, β'); le nombre de ces points est

$$\alpha' \times 2(\alpha - 1) + \beta' \times 2(\beta - 1).$$

De même, si a est une tangente commune aux deux courbes complétées, etc. Pour chacun des contacts en nombre

$$c = \alpha\beta' + \beta\alpha',$$

A′ étant le point de tangence, l'une des deux tangentes a coïncidentes appartient à la correspondance (α, α'), tandis que l'autre appartient à la correspondance (β, β'), et, simultanément, a étant la tangente de contact, deux points A′ coïncident dans des conditions analogues.

Pour $\alpha = 1$, un point A′ d'intersection des deux courbes complétées donne deux tangentes a coïncidentes qui ne peuvent appartenir à la même correspondance $(1, \alpha')$, mais seulement à la même correspondance (α', β'); pour $\beta = 1$, etc. Nous reviendrons sur le cas où, la courbe X étant une conique, on aurait

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1.$$

En ce qui concerne la nature des contacts capables d'assurer la décomposition, voici une remarque :

Pour $\alpha = 1$, si X a des tangentes d'inflexion, chacune d'elles doit toucher en α' points la courbe X′ complétée, ces contacts singuliers étant au nombre de ceux qu'exige la décomposition; l'examen de la figure montre en effet qu'une tangente d'inflexion de X ne peut être traversée par X′ en l'un des points A′ qui correspondent à cette tangente dans la correspondance $(1, \alpha')$, puisque, en faisant mouvoir la tangente a dans le voisinage de la tangente d'inflexion, on aurait deux tangentes a pour un même point A'; cette tangente d'inflexion doit toucher en A' la courbe X', le point A' pouvant être toutefois un point de rebroussement de X'. Pour $\alpha' = 1$, un point de rebroussement de X' doit être de même un point multiple d'ordre α de X complétée. Il y a là des contacts singuliers qui sont du nombre de ceux qu'exige la décomposition.

7. Si la courbe X est une conique, la courbe X' étant toujours d'ordre m', la décomposition de la correspondance tangentielle $(2, m')$ peut seulement donner deux correspondances $(1, \alpha')$ et $(1, \beta')$. *La conique* X *doit alors avoir avec la courbe* X' *des contacts en nombre* m', *qui assurent, comme on l'a vu, la décomposition;* mais α' n'est pas déterminé, sauf pour $m' = 2$ ou $m' = 3$, et l'on verra plus loin ce qui se passe pour $m' = 4$.

Comme on a ici $\alpha = 1$, $\beta = 1$, les deux courbes sont nécessairement tangentes en tous les points qui leur sont communs, l'une des deux valeurs de t qui coïncident appartenant à la correspondance $(1, \alpha')$, tandis que l'autre appartient à la correspondance $(1, \beta')$.

On aurait un fait corrélatif avec une conique X', les $2n$ tangentes communes à la courbe X et à cette conique étant confondues deux à deux par le fait que les deux courbes ont des contacts en nombre n.

8. Si l'une des correspondances doit être uniforme, on a ce théorème :

Théorème. — *Pour que la correspondance tangentielle entre les deux courbes unicursales* X *et* X', *la* *première de classe n, la seconde d'ordre m', se décompose en deux correspondances dont l'une soit une correspondance uniforme, il faut et il suffit que les deux courbes complétées aient des contacts en nombre*

$$n + m' - 2,$$

les rapports anharmoniques des éléments de contact pris quatre à quatre (c'est-à-dire les rapports anharmoniques des t de ces éléments) étant les mêmes sur les deux courbes; cela forme d'ailleurs seulement $n + m' - 2$ conditions distinctes.

Les tangentes d'inflexion de X doivent toucher X', les points de rebroussement de X' doivent être sur X, une tangente d'inflexion de X pouvant toutefois passer par un point de rebroussement de X'.

On pourrait énoncer des conditions moins surabondantes; l'énoncé, tel qu'il est, veut dire ceci : parmi les façons d'être de deux courbes unicursales X et X' qui ont $n + m' - 2$ contacts, il en peut exister une pour laquelle les rapports anharmoniques indiqués soient égaux, et, alors, la décomposition demandée a lieu.

III.

9. L'exemple le plus simple est celui de deux coniques bitangentes qui est bien connu.

La décomposition de la correspondance tangentielle (2, 2) en deux correspondances homographiques intervient dans la construction de la droite qui est la transformée d'un point dans une corrélation générale déterminée par ses deux coniques doubles (coniques bitangentes). Elle donne lieu à ce théorème :

Etant données deux coniques bitangentes, il existe *une infinité de quadrilatères* ABCD, *tels que* AB *est tangent en* A *à la première conique*, BC *est tangent en* B *à la seconde conique, ..., les deux couples* AB *et* CD *n'appartenant pas à la même homographie, ...*

10. Pour une conique X et une cubique nodale X', trois contacts assurent la décomposition

$$(2, 3) = (1, 1) + (1, 2);$$

le fait corrélatif est donné par une conique X' et une courbe X de troisième classe ayant une tangente double (quartique tricuspidale, hypocycloïde à trois rebroussements, cardioïde). Ce qui concerne les contacts singuliers, pour $\alpha' = 1$ ou $\alpha = 1$, est mis en relief par le fait suivant : soit une courbe de troisième ordre et de troisième classe, ayant par suite un point de rebroussement et une tangente d'inflexion; si on la prend comme courbe X', la conique X doit passer par le point de rebroussement (à cause de $\alpha' = 1$) et être doublement tangente à la courbe; si on la prend comme courbe X, la conique X' doit toucher la tangente d'inflexion (à cause de $\alpha = 1$) et être doublement tangente à la courbe.

11. Soit une quartique trinodale X' et une conique X quadruplement tangente à cette courbe : la décomposition de la correspondance tangentielle est assurée, mais on peut avoir

$$(2, 4) = (1, 2) + (1, 2),$$

ou

$$(2, 4) = (1, 1) + (1, 3);$$

il s'agit de distinguer ces deux cas.

(*a*). Pour éclairer ce qu'il y a à dire ici, nous ferons une courte incursion dans le domaine des quartiques de genre *un*. Étant donnée une quartique *binodale* X', dont les points doubles sont les sommets A et C du triangle de référence, l'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme

$$(ky^2 + Pyz + Q\,zx + Rxy)^2 - y^2 X = 0,$$

le polynome X étant du second degré, de sorte qu'elle est l'enveloppe des coniques

$$\lambda^2 y^2 + 2\lambda(ky^2 + \ldots) + X = 0;$$

X est l'une quelconque de ces coniques, comme on le voit en changeant k en $k + \lambda$. La conique X est ainsi quadruplement tangente à la quartique X', et le système de coniques quadruplement tangentes dont elle fait partie (¹) est celui qui contient la droite double AC, obtenue pour λ infini; les quatre points de contact d'une telle conique avec la quartique sont sur une conique passant aux points doubles, et dont les tangentes en ces points sont conjuguées de AC par rapport aux deux tangentes de la courbe. Dans ces conditions très précises, la correspondance tangentielle entre la conique X et la quartique X' se décompose en deux correspondances (1, 2).

En effet, considérons la conique X qui est l'enveloppe de la droite

$$xt^2 + 2yt + z = 0,$$

et dont l'équation est

$$y^2 - xz = 0$$

(¹) Il y en a douze autres, formant trois familles. Cf. *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVII : *Sur les dégénérescences des* 63 *systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique*.

ou

$$xt + y)^2 - x(xt^2 + 2yt + z) = 0;$$

l'équation

$$(y^2 - xz)f_1^2 - f_2^2 = 0$$

ou

$$[(xt + y)^2 - x(xt^2 + 2yt + z)]f_1^2 - f_2^2 = 0$$

représente une quartique binodale X', les points doubles étant à la rencontre de la droite $f_1 = 0$ avec la conique $f_2 = 0$, et cette quartique est quadruplement tangente à la conique de la manière indiquée, les points de contact et les points doubles étant sur la conique $f_2 = 0$; elle est d'ailleurs la plus générale de son espèce, car elle doit dépendre de 8 paramètres $(14 - 2 - 4)$, et c'est bien ce qui a lieu. En coupant cette courbe par la tangente variable $xt^2 + \ldots = 0$, on a 4 points qui se séparent en deux groupes de 2 points, attendu que l'on a, avec $\varepsilon = \pm 1$,

$$(xt + y)f_1 + \varepsilon f_2 = 0;$$

on a aussi bien

$$(yt + z)f_1 - \varepsilon t f_2 = 0;$$

le fait annoncé est établi.

On peut remarquer que chacune des correspondances (1, 2) ainsi obtenues entre les deux courbes X et X' fait partie d'une correspondance dans le plan; car, si l'on élimine y entre les deux équations ci-dessus, on a

$$t^2 x f_1 + 2\varepsilon t f_2 - z f_1 = 0;$$

les coordonnées u, v, w de la tangente à la conique étant t^2, $2t$, 1, on peut écrire

$$u . x f_1 + \varepsilon v . f_2 - w . f_1 = 0;$$

on a d'ailleurs

$$ux + vy + wz = 0;$$

ces deux équations, dont aucune ne renferme t, établissant une correspondance dans le plan entre la droite (u, v, w) et le point (x, y, z).

Je renverrai, pour une autre démonstration, au Mémoire dont il a été parlé au début; cette démonstration fait bien ressortir le rôle des contacts des deux courbes.

Si A est un point de rebroussement de la quartique, c'est que, dans l'équation

$$(ky^2 + \ldots)^2 - y^2 X = 0,$$

le polynome X ne renferme pas de terme en x^2 : la conique X passe alors en A, et est triplement tangente à la quartique; si A et C sont des points de rebroussement, la conique X passe en A et C, et est doublement tangente à la quartique : par exemple, si la quartique est une cartésienne, la conique X est un cercle doublement tangent à cette courbe, et ayant un centre sur l'axe.

Soit alors une quartique trinodale X′ dont les points doubles sont A, B, C. Un premier système α de coniques quadruplement tangentes à la quartique comprend une conique formée de la droite double BC; si B ou C est cuspidal, ces coniques passent en B ou C (bien qu'on n'ait pas $\alpha' = 1$), mais il n'en est pas de même pour le point A. On a deux systèmes analogues β et γ. Si la conique X fait partie de l'un de ces systèmes, la correspondance tangentielle se décompose en deux correspondances (1, 2). *La quartique peut être par exemple un limaçon de Pascal, pour lequel les points cycliques sont des points de rebroussement; les coniques* X *pourront être les cercles bitangents qui ont leurs centres sur l'axe.*

(b). *Une quartique trinodale* X′ *admet un quatrième* *système de coniques* X *quadruplement tangentes, pour lequel le rapport anharmonique des quatre points de contact est le même sur* X *et sur* X′, de sorte que la correspondance tangentielle (2, 4) se décompose en deux correspondances (1, 1) et (1, 3). L'équation de X′, rapportée au triangle des points doubles, est en effet

$$\frac{a}{x^2}+\ldots+\frac{2f}{yz}+\ldots=0,$$

et la transformation unidéterminative

$$\frac{ux}{\lambda}=\frac{vy}{\mu}=\frac{wz}{\nu}\qquad(\lambda+\mu+\nu=0)$$

donne une conique X; le point (x, y, z) de la quartique, et la tangente correspondante (u, v, w) à la conique, vérifient la condition

$$ux+vy+wz=0,$$

de sorte qu'il y a bien correspondance tangentielle uniforme; si l'on pose $A=bc-f^2, \ldots, F=gh-af, \ldots$, l'équation ponctuelle de la conique est

$$A\lambda^2.x^2+\ldots+2F\mu\nu.yz+\ldots=0,$$

et l'enveloppe de cette courbe, quand λ, μ, ν varient sous la condition $\lambda+\mu+\nu=0$, est la quartique X′. Si la quartique a $\varkappa'$ points de rebroussement, comme on a $\alpha'=1$, les coniques X passent par ces points et ont avec la quartique des contacts véritables en nombre $4-\varkappa'$; *avec un limaçon de Pascal, ces coniques sont les cercles bitangents qui ont leurs centres sur le cercle dont le limaçon est une conchoïde,* et ils sont liés au pôle d'anallagmasie situé sur l'axe; pour une cardioïde, ces cercles passent par le point de rebroussement réel (ce sont alors en même temps les cercles qui ont pour diamètres les cordes menées par le point de rebroussement dans le cercle dont la cardioïde est une podaire.

Voici une remarque : si, de deux points M et N d'uu limaçon de Pascal, on mène à un cercle bitangent, du système de ceux qui n'ont pas leurs centres sur l'axe, deux tangentes m et n convenablement choisies, et dont aucune n'est arbitraire, leur angle est constant, quel que soit ce cercle; en effet, le rapport anharmonique des points M, N, I, J sur le limaçon est égal au rapport anharmonique des tangentes m, n, i, j au cercle; il en résulte ce fait connu qu'un limaçon de Pascal est lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à deux cercles doublement tangents à cette courbe, sans avoir leurs centres sur l'axe; l'un des cercles peut se réduire à un point, qui est le point double de la courbe, de sorte que le limaçon est la podaire oblique de son point double par rapport à un cercle bitangent de l'espèce indiquée : cette dernière propriété entraîne la précédente, et, d'ailleurs, elle rend compte de la correspondance tangentielle uniforme entre le limaçon et le cercle bitangent.

On aurait des faits corrélatifs. On considérerait d'abord une conique X′ et une courbe de quatrième classe ayant deux tangentes doubles, etc.

Si l'on considère une courbe pour laquelle on a

$$m = 4, \qquad \delta = 1, \qquad \varkappa = 2,$$

et, par suite,

$$n = 4, \qquad \tau = 1, \qquad \iota = 2,$$

par exemple un limaçon de Pascal, on pourra la prendre comme courbe X′ ou comme courbe X, et l'on aura des remarques analogues à celles faites à la fin du n° 10 : si on la prend comme courbe X, l'une des correspondances tangentielles sera une correspondance (1, 1) si la conique X' touche les deux tangentes d'inflexion et est bitangente à la courbe.

12. Le cas $n = 3$, $m' = 3$ fera bien comprendre comment les contacts en nombre c (et en général les c coïncidences simultanées pour t et t') doivent avoir lieu *d'une certaine façon* pour qu'il y ait décomposition de la correspondance. Il faudra quatre contacts; comme une courbe unicursale de troisième ordre ou de troisième classe dépend de huit paramètres, on peut la déterminer par quatre points et leurs tangentes; on a alors ce théorème :

Théorème. — *Il existe quatre courbes unicursales du troisième ordre touchant quatre droites données en quatre points donnés, et quatre unicursales de troisième classe touchant les mêmes droites aux mêmes points :* CES COURBES SE CORRESPONDENT UNE A UNE, *le rapport anharmonique des quatre points de contact étant le même sur les deux courbes, et, si l'on prend deux courbes qui se correspondent, la correspondance tangentielle se décompose en deux correspondances dont l'une est une correspondance* (1, 1).

En effet, les quatre points étant désignés par les indices 1, 2, 3, 4, on a d'abord pour toute unicursale du troisième ordre passant par ces points

$$x = \sum \frac{A_1}{t-\alpha} x_1, \qquad y = \sum \frac{A_1}{t-\alpha} y_1, \qquad z = \ldots;$$

pour $t = \alpha$ on a le point d'indice 1, etc. Les quatre paramètres restants sont $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$, et la valeur du rapport anharmonique $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Soit $u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0$ la droite, passant au point d'indice 1, à laquelle la courbe doit être tangente en ce point. Cette droite rencontre la courbe ci-dessus en trois points dont les t sont donnés par l'équation

$$u_1\left(\frac{A_1}{t-\alpha}x_1+\frac{A_2}{t-\beta}x_2+\ldots\right)+v_1\left(\frac{A_1}{t-\alpha}y_1+\ldots\right)+\ldots=0;$$

l'un de ces points est le point d'indice 1, les deux autres correspondent aux deux valeurs de t données par l'équation

$$u_1\left(\frac{A_2}{t-\beta}x_2+\frac{A_3}{t-\gamma}x_3+\ldots\right)+\ldots+\ldots=0,$$

et la droite est tangente si l'une de ces deux valeurs de t est égale à α, c'est-à-dire si l'on a

$$A_2\frac{u_1x_2+v_1y_2+w_1z_2}{\alpha-\beta}+A_3\frac{u_1x_3+\ldots}{\alpha-\gamma}+\ldots=0,$$

ou, avec une notation abrégée,

$$A_2\frac{(1.2)}{\alpha-\beta}+A_3\frac{(1.3)}{\alpha-\gamma}+A_4\frac{(1,4)}{\alpha-\delta}=0.$$

Cette relation et les trois relations analogues déterminent les rapports $A_1:A_2:A_3:A_4$, et la valeur du rapport anharmonique $(\alpha\beta\gamma\delta)$. L'élimination des A donne

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1,2}{\alpha-\beta} & \frac{1,3}{\alpha-\gamma} & \frac{1,4}{\alpha-\delta} \\ \frac{2,1}{\beta-\alpha} & 0 & \frac{2,3}{\beta-\gamma} & \frac{2,4}{\beta-\delta} \\ \frac{3.1}{\gamma-\alpha} & \frac{3,2}{\gamma-\beta} & 0 & \frac{3,4}{\gamma-\delta} \\ \frac{4,1}{\delta-\alpha} & \frac{4,2}{\delta-\beta} & \frac{4,3}{\delta-\gamma} & 0 \end{vmatrix}=0;$$

en divisant les trois premières lignes respectivement par $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$, $\alpha-\beta$, et les trois premières colonnes par les mêmes quantités, en désignant par P le produit de ces quantités, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1,2}{P} & \frac{1,3}{-P} & \frac{1,4}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)} \\ \frac{2,1}{-P} & 0 & \frac{2,3}{P} & \frac{2,4}{(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)} \\ \frac{3,1}{P} & \frac{3,2}{-P} & 0 & \frac{3,4}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \\ \frac{4,1}{(\delta-\alpha)(\beta-\gamma)} & \frac{4,2}{(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)} & \frac{4,3}{(\delta-\gamma)(\alpha-\beta)} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

le signe — s'introduisant là où il y avait $\gamma-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\alpha$ au lieu de $\beta-\gamma$, ... On peut alors multiplier les trois premières lignes par P et supprimer le facteur P dans la dernière colonne, ce qui revient à remplacer P par 1 dans l'écriture ci-dessus; en posant

$$\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{1} = \frac{(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)}{-k} = \frac{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)}{k-1},$$

c'est-à-dire en désignant par k le rapport anharmonique $(\alpha\beta\gamma\delta)$, on a l'équation du quatrième degré en k

$$\begin{vmatrix} 0 & (1,2) & -(1,3) & (1,4) \\ -(2,1) & 0 & (2,3) & \frac{(2,4)}{-k} \\ (3,1) & -(3,2) & 0 & \frac{(3,4)}{k-1} \\ -(4,1) & \frac{(4,2)}{k} & \frac{-(4,3)}{k-1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On aura la même équation dans le cas de l'unicursale de troisième classe, car il faudra échanger (i,j) et (j,i), ce qui revient à échanger les lignes et les colonnes en changeant les signes de tous les termes. D'après ce qu'on a vu au n° 8, le théorème est démontré.