Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 420-432
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__420_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

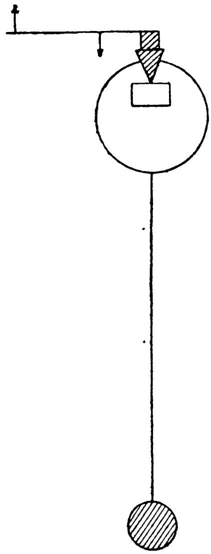
ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Mouvements réels d'un solide indéfini dont chaque point décrit une trajectoire sphérique.*

2° *A quelle variété se réduit un pareil mouvement quand un point du solide décrit un cercle?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule dont le centre de gravité est à* 2^{m} *au-dessous de l'arête du couteau de suspension est pressé sur un cylindre de* $0^{mm},25$ *de rayon par une force égale à son poids.*

Après six oscillations simples, la demi-amplitude a subi une diminution de $30''$.

Calculer le coefficient de frottement entre le petit cylindre et le contact frottant.



On néglige la résistance de l'air et le frottement de roulement sur l'arête du couteau. (Juillet 1904.)

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Étude cinématique du mouvement d'un système invariable qui a un point fixe.*

2° *Un point matériel, de masse* m, *est soumis à l'action de la force centrale et attractive* $\frac{m_{\prime}\mathrm{R}}{r^2}$, R *désignant une constante et* r *la distance du point au centre d'attraction. A un certain instant, il est en un point donné* A *et a une vitesse connue* v.

Déterminer la direction de cette vitesse, sachant que la trajectoire passe par un second point donné B.

Discussion.

Épreuve pratique. — *Déterminer le centre de gravité d'un onglet sphérique homogène :*

Rayon de la sphère.............	0,237
Angle d'ouverture de l'onglet...	63°21'35"

(Juillet 1904.)

Épreuve écrite. — 1° *Mouvement relatif d'un point materiel; forces apparentes, leur expression analytique.*

2° *Appliquer le principe des vitesses virtuelles à la détermination de la position d'équilibre de deux sphères homogènes pesantes appuyées l'une contre l'autre et contre deux plans dont l'intersection est horizontale.*

On néglige les frottements.

Épreuve pratique. — *On considère un trièdre trirectangle* $Oxyz$; *un point* A *sur* Ox, *un point* B *sur* Oy, *un point* C *sur* Oz; *enfin, la perpendiculaire* CD *abaissée de* C *sur* AB.

On demande de déterminer les éléments de la réduction canonique du système de vecteurs

$$\overline{OA},\quad \overline{OB},\quad \overline{CD},$$

sachant que

$$\overline{OA} = 1,\qquad \overline{OB} = 2,\qquad \overline{OC} = 1.$$

On calculera les angles de l'axe central avec les axes Ox, Oy, Oz *et les coordonnées du point où il coupe le plan* xOy. (Novembre 1904.)

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Un ellipsoïde représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4a^2$$

est rempli d'une masse homogène S *douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton : calculer l'attraction* Z *subie par un point* M *situé sur l'axe des* z *à l'intérieur de l'ellipsoïde. Mouvement que prendrait ce point, d'abord* *en repos, si la masse* S *était fluide, n'opposant au mouvement de* M *qu'une faible résistance proportionnelle à la vitesse.*

SOLUTION.

$$Z = -\frac{16}{3}\mu\pi z\left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$

II. *Une plaque très mince, homogène, de poids* $2mg$, *a la forme d'un triangle équilatéral* OPQ, *de côté* $2a\sqrt{3}$, *dont le sommet* O *est fixe, tandis que le sommet* P *est assujetti à se mouvoir sur une circonférence horizontale ayant son centre en* O. *Équations générales du mouvement de la plaque; conditions pour que l'angle de la plaque avec l'horizon soit constant. Étudier le mouvement quand les vitesses initiales sont nulles; cas des petites oscillations.*

SOLUTION.

Prenant comme axes mobiles les axes principaux en O, on détermine la position de la plaque à l'aide des trois angles d'Euler, φ restant égal à $\frac{\pi}{6}$; on écrira les équations de Lagrange, où

$$2T = ma^2\left[3\theta'^2 + (7 + 3\cos^2\theta)\psi'^2 - 4\sqrt{3}\,\theta'\psi'\sin\theta\right].$$

On trouve que, pour que θ soit constant, il faut que ψ' le soit lui-même avec la valeur $\sqrt{-\frac{2g}{3a\sin\theta}}$. Quand la plaque part du repos, l'équation relative à ψ et celle des forces vives donnent

$$\psi' = \frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{7 + 3\cos^2\theta}\theta', \qquad \theta'^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{a}\frac{7 + 3\cos^2\theta}{3 + 7\cos^2\theta}(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

CALCUL. — *Un point pesant, assujetti à se mouvoir sur une sphère de* 2^m *de rayon, a été lancé dans des conditions telles que sa trajectoire reste comprise entre le plan horizontal qui passe par le centre et le plan parallèle situé à* 1^m *au-dessous. Calculer, à* $0^s,0001$ *près, le temps nécessaire au mobile pour passer du point le plus haut au point le plus bas de cette trajectoire en supposant* g *égal à* π^2.

SOLUTION.

$$T = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\, dz}{\sqrt{gz(1-z)(4+z)}} = 0^s,6674.$$

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une circonférence homogène, pesante, de masse m, de rayon a, est assujettie, par des liaisons sans frottement, à toucher un plan fixe x_1Oy_1 en un point fixe O.*

1° *Former les équations différentielles du mouvement par la méthode de Lagrange.*

2° *Retrouver les intégrales premières de ces équations par l'emploi direct des théorèmes généraux.*

3° *Montrer que ces équations s'intègrent par des quadratures.*

4° *A un instant donné, on introduit brusquement de nouvelles liaisons sans frottement et persistantes, qui fixent le plan de la circonférence; l'état des vitesses étant connu immédiatement avant l'introduction des liaisons, trouver l'état ultérieur des vitesses.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur une cuvette hémisphérique fixe* T, *de rayon* R, *et dont la concavité est tournée vers le haut, on place une petite bille homogène pesante, de rayon r, et on l'abandonne* SANS VITESSE.

I. *Étudier le mouvement de la bille.*

II. *Trouver la durée des oscillations infiniment petites de la bille lorsque sa position est initiale et très voisine du point le plus bas de* T.

III. *La position initiale étant quelconque, déterminer la réaction de* T *lorsque la bille est aussi bas que possible.*

Pour chacune des trois questions qui précèdent, on envisage successivement les deux hypothèses suivantes :

1° *La bille peut glisser et rouler; il n'y a pas de frottements;*

2° *La bille ne peut que rouler; il n'y a pas de frottement de roulement.*

Applications numériques (*unités* C.G.S.) :

$$R = 100, \qquad r = 1, \qquad g = 981, \qquad m = 30.$$

En appelant θ *l'angle de la normale commune extérieure aux deux sphères limitant la cuvette et la bille avec la verticale descendante, pour la question* III, *on supposera la valeur initiale de* θ *égale à* 60°.

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Une barre* AB *pesante, homogène, solide, de longueur* $2l$, *est attachée par son extrémité* A *à un fil flexible, inextensible, sans masse, de longueur* L, *avec un bout fixe* O.

Au début du mouvement, la figure OAB *est dans un plan vertical* P, *et le fil est tendu. On lance la barre dans le plan* P *d'une façon quelconque, mais telle toutefois que le fil reste d'abord tendu.*

Étudier le mouvement.

II. *Un point* M *décrit une trajectoire* C, *dont les équations par rapport au trièdre trirectangle* $Oxyz$ *des coordonnées sont* (t *est le temps*) :

$$x = \sum_n \frac{t^{3n}}{(3n)!}, \qquad y = \sum_n \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)!}, \qquad z = \sum_n \frac{t^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Soient

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

$\Delta = xy + yz + xz$;

MV *le vecteur vitesse;*

MΓ *le vecteur accélération;*

R *le rayon de courbure;*

T *le rayon de torsion.*

Calculer : les longueurs MV *et* MΓ; *les cosinus des angles* $\widehat{OMV}$, $\widehat{OM\Gamma}$, $\widehat{VM\Gamma}$: *les accélérations normale et tangentielle; les rayons* R *et* T.

Montrer notamment que

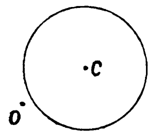
$$\overline{O\Gamma}^2 . \overline{\Gamma V}^2 = \frac{4\rho^6}{R^2} = -4T$$

et que les quantités à calculer sont toutes exprimables en Δ *et* ρ. (Novembre 1904.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, on place une cheville horizontale* O *qui est dépolie.*

Un disque circulaire C, *pesant et homogène, est abandonné sans vitesse initiale et vient heurter contre la*



cheville O *après une chute d'une hauteur h égale à quatre fois son diamètre.*

Trouver le mouvement de ce disque après le choc, sachant que les corps choqués sont mous et que, au moment du choc, le rayon qui passe par la cheville fait un angle de 30 *degrés avec l'horizontale. Le coefficient de frottement entre le disque et la cheville est égal à* $\frac{1}{10}$.

Trouver au préalable quelle doit être la hauteur h de la chute initiale du disque pour que, après le choc, le disque ne reste pas appuyé sur la cheville et ne la rencontre pas encore une fois.

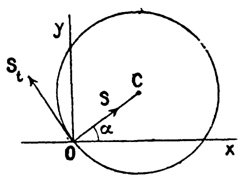
Solution.

Le disque, dont le moment d'inertie par rapport à son centre est $\frac{1}{2}MR^2$, commence par tomber verticalement d'un mouvement de translation dont la vitesse au moment du choc est $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Mettons l'indice o pour désigner le commencement du choc et l'indice 1 pour en désigner la fin, nous aurons, en prenant la verticale Oy vers le haut,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -v_0.$$

Soit S la composante normale de la percussion qui se produit en O pendant le choc; la composante tangentielle en sera S_f tant qu'il y aura glissement. Soit σ l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} S\,dt$ qui mesure la percussion en quantité de mouvement. Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité et celui des moments des quantités de mouvement par rapport au centre de gravité. Soit ω la vitesse angulaire de la rota-



tion positive de gauche à droite. Soient x, y les coordonnées du centre de gravité. Nous aurons

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \sigma(\cos\alpha - f\sin\alpha),$$

$$M\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + Mv_0 = \sigma(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}MR^2\omega_1 = f\sigma R.$$

A la fin du choc, la vitesse du point O du disque, estimée suivant la normale OC, doit être nulle. Comme la vitesse de ce point résulte de la translation du centre C et de la rotation ω, on a, pour cette composante normale,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \cos\alpha + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \sin\alpha = 0$$

ou

$$\frac{\sigma}{M} - v_0 \sin\alpha = 0.$$

On a donc, après le choc,

$$
(\mathrm{A}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= \quad v_0 \sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha),\\
\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 &= - v_0 \cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha),\\
\mathrm{R}\omega_1 &= \quad w_0 f \sin\alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais ce n'est vrai que s'il y a eu glissement pendant tout le choc en sens contraire de S_t. Autrement dit, la vitesse de O, estimée suivant S_t, doit être négative pendant toute la durée du choc.

A la fin du choc, elle est

$$
-\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \sin\alpha + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \cos\alpha + \mathrm{R}\omega_1 = - v_0(\cos\alpha - 3f\sin\alpha).
$$

On doit donc avoir

$$
\cos\alpha - 3f\sin\alpha > 0,
$$

c'est ce qui arrive avec les données du problème.

On verrait, du reste, que cette quantité est négative pendant tout le choc, en remarquant que, pendant la durée du choc, la valeur de σ est $\varepsilon v_0 \sin\alpha$, où ε est compris entre 0 et 1.

Connaissant par les formules (A) le mouvement à la fin du choc, il s'agit de trouver le mouvement qui suivra. Mais ce mouvement ne sera pas le même si le disque reste appuyé sur O ou s'il se sépare de O.

Si le disque se sépare du point O, son mouvement sera le suivant : le centre de gravité se mouvra comme un point pesant et décrira une parabole avec une vitesse de rotation constante égale à ω_1.

Examinons s'il peut en être ainsi. La parabole décrite par le centre de gravité donne

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,
$$

d'où

$$
\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1, \qquad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 - gt
$$

et

$$
\begin{aligned}
x &= \quad v_0 \sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t + \mathrm{R}\cos\alpha,\\
y &= - v_0 \cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 + \mathrm{R}\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

La distance de ce point à l'origine donne

$$x^2+y^2 = R^2 + t^2[v_0^2(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2 - Rg\sin\alpha]$$
$$+ v_0 g\cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

Cette quantité est plus grande que R^2 si l'on a

$$v_0^2(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2 - Rg\sin\alpha$$
$$+ v_0 g\cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t + \tfrac{1}{4}gt^2 > 0.$$

Le discriminant de ce trinome en t est

$$g^2\sin\alpha[Rg - v_0^2\sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2].$$

Si l'on a

$$h > \frac{R}{2\sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2},$$

on aura d'autre part

$$v_0 = 2gh$$

et l'on verra que le discriminant est positif.

L'inégalité est vérifiée pour $h = 4R$.

On voit ainsi que x^2+y^2 est toujours plus grand que R^2 et, par suite, le disque se sépare du point O et ne rencontre plus ce point. C'est donc le mouvement que l'on vient d'indiquer.

Épreuve pratique. — *A deux points fixes* A *et* B, *situés sur une même horizontale et distants de* 4^{m}, *on suspend un fil de* 8^{m} *de long, pesant et homogène, qui pèse* 1^{kg} *par mètre courant; ce fil prend la forme d'une chaînette.*

On coupe le fil en deux points C *et* D *situés sur une même horizontale et distants de* 2^{m}, *puis on attache en* C *et* D *une barre pesante et homogène.*

Quel doit être le poids de cette barre pour que les points C *et* D *conservent la position qu'ils occupaient précédemment?*

Solution.

$2^{\text{kg}},41$. (Juillet 1905.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Un disque circulaire, de rayon* R *et de masse* M, *infiniment mince, homogène et pesant, est traversé suivant un diamètre par une tige rigide, rectiligne, infiniment mince et sans masse, à laquelle il est invariablement lié. La tige est terminée, d'un côté, en un point* O *de la circonférence du disque, de l'autre en un point* A *situé hors du disque. Le point* O *est fixe; la tige est assujettie à glisser sans frottement sur un cercle horizontal fixe dont le centre est placé sur la verticale ascendante du point* O.

1° *Établir les équations du mouvement de ce système, les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Examiner le cas particulier suivant :*

$$R = 2, \qquad M = 1,$$

le rayon du cercle fixe est égal à la distance de son centre au point O ; *à l'époque initiale, le plan du disque est vertical, le système est animé d'une rotation instantanée de vitesse angulaire égale à* $\sqrt{5}$ *autour d'un axe* OI *mené dans le plan du disque et faisant avec la verticale ascendante, du côté de* OA, *un angle dont la tangente est égale à* 3.

Épreuve pratique. — *Soit* Δ *un axe fixe. Soit* D *une droite qui rencontre* Δ *et ne lui est pas perpendiculaire.* D *est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de* Δ. *Un point matériel* M *est assujetti à rester sur* D *et est attiré par l'axe* Δ *avec une force proportionnelle à la distance de* M *à* Δ. *Trouver le mouvement du point* M.

(Juillet 1905.)

Rennes.

Épreuve écrite. — I. *Mouvement d'un point pesant sur une surface polie. Cas spécial des petits mouvements; expression des périodes en fonction des rayons de courbure principaux.*

II. *Directions invariantes dans une déformation homogène. Déformation pure.*

Épreuve pratique. — *Une plaque homogène très mince ayant la forme d'un triangle rectangle est mobile autour d'un des côtés de l'angle droit. Déterminer le centre de percussion correspondant.*

Dimensions :

Côté de l'axe .... $a = 2^{\text{m}}$
Côté perpendiculaire .... $b = 3^{\text{m}}$

La plaque étant supposée au repos vient à être frappée normalement à son plan au centre de percussion, par un projectile qui s'y incruste.

Trouver la vitesse initiale de rotation du système.

Poids du projectile : 7^{g}.

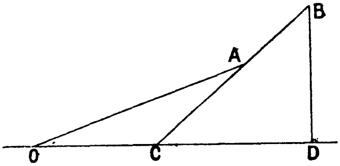
Vitesse du projectile au moment du choc : 100 m : sec.

Poids spécifique de la plaque par décimètre carré : 20^{g}.

(Juillet 1905.)

Toulouse.

Epreuve écrite. — I. *Une barre prismatique homogène pesante* OA, *dont la section est très petite, peut tourner*



autour d'un point O, *dans un plan vertical. Elle s'appuie par son extrémité* A *sur un plan incliné* BCD *situé dans le même plan vertical et ce plan peut glisser sans frottement le long d'un plan horizontal passant par* O. *Étudier le mouvement du système.*

II. *Une sphère homogène pesante est assujettie à se mouvoir sur un plan horizontal dépoli de façon qu'il y ait roulement sans glissement. Chacun des points* M *de la* *sphère est attiré par un point fixe* O *du plan horizontal proportionnellement à la distance* OM *et à sa masse. On demande d'étudier le mouvement de la sphère et de déterminer la réaction du plan.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un triangle isoscèle* ABC *rectangle en* A *est tracé dans un plan* P *qui glisse sur un plan fixe* Q.

Le mouvement de ce plan est à chaque instant la résultante de trois rotations ω_1, ω_2, ω_3 *qui se font respectivement autour des points* A, B, C (ω_1, ω_2, ω_3 *sont des fonctions données du temps*).

Déterminer à chaque instant le centre instantané et trouver les deux courbes dont le roulement peut servir à définir le mouvement du plan P.

On prendra les droites AB, AC *pour axes mobiles des* x *et des* y; *on supposera que, à l'origine du temps, les axes mobiles coïncident avec les axes fixes, et l'on achèvera les calculs dans l'hypothèse où l'on aurait*

$$\omega_1 = 1 + 2\tan t - \tan^2 t,$$
$$\omega_2 = -2\tan t,$$
$$\omega_3 = \tan^2 t.$$

Vérifier que, dans ce cas, le point C *décrit une chaînette.*

(Juillet 1905.)