

SOLON CHASSIOTIS

Note sur les courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 394-399

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__394_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[03j α]

NOTE SUR LES COURBES GAUCHES;

PAR M. SOLON CHASSIOTIS.

1. Soit à trouver les courbes gauches C , ayant même représentation sphérique des tangentes qu'une courbe arbitraire C' (qui n'est pas une droite ni une hélice) et qui satisfont en outre à la relation

$$(1) \quad F(R, T) = 0,$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de C .

Nous supposons que R et T peuvent être exprimées à l'aide d'un paramètre u et que F n'est pas homogène

en R et T , ni nul ni infini pour toutes les valeurs de u .

Si C' est une courbe quelconque, on passera d'un point $M'(x', y', z')$ de C' à un autre $M(x, y, z)$ de C , par une transformation de Combescure :

$$(2) \quad \frac{dx}{dx'} = \frac{dy}{dy'} = \frac{dz}{dz'} = \frac{ds}{ds'} = \frac{R}{R'} = \frac{T}{T'} = \varphi(u);$$

cette transformation n'est définie qu'à la fonction $\varphi(u)$ près : on aura, en prenant une deuxième courbe C'' analogue à C' de rapports analogues aux précédents et si C'' est définie par les formules de Serret (voir Note de Serret dans MONGE, *Applications de l'Algèbre à la Géométrie*, 5^e édit.),

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{\sin u} = \frac{dy}{-\cos u} = \frac{dz}{\psi(u)} = \frac{ds}{1 + \psi^2} \\ = \frac{R}{\frac{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \psi^2 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{T}{\frac{\psi + \psi''}{1 + \psi^2 + \psi'^2}} = \varphi_1(u); \end{array} \right.$$

comme $\varphi_1(u)$ est arbitraire, on peut se proposer de la déterminer de manière que la courbe C satisfasse à la relation (1). On aura

$$(4) \quad F\left(\varphi_1 \frac{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \psi^2 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}}, \varphi_1 \frac{\psi + \psi''}{1 + \psi^2 + \psi'^2}\right) = 0,$$

équation qui détermine la fonction φ_1 . Des formules (4) nous déduisons

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \int \varphi_1(u) \sin u \, du, \\ y = - \int \varphi_1(u) \cos u \, du, \\ z = \int \varphi_1(u) \psi(u) \, du. \end{array} \right.$$

Ce sont les coordonnées du point M d'une des courbes cherchées. On remarquera que x et y sont les parties réelles de l'imaginaire

$$-y + ix = \int \varphi_1(u) e^{iu} du.$$

En sorte que les quadratures (c) se réduisent toujours à deux :

$$\int \varphi_1(u) e^{iu} du, \quad \int \varphi_1(u) \psi(u) du.$$

On peut même signaler le cas très étendu où ces quadratures se réduisent à une seule, lorsque

$$\varphi_1(u) = \psi(u).$$

Dans ce cas, ψ satisfait à l'équation

$$(4 \text{ bis}) \quad F\left(\psi' \frac{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \psi^2 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}}, \psi' \frac{\psi + \psi''}{1 + \psi^2 + \psi'^2}\right) = 0,$$

et l'on a

$$z = \frac{1}{2} \psi^2(u).$$

Quant à x et y , ils sont donnés par la quadrature

$$ix - y = \int e^{iu} \psi'(u) du.$$

Si $\psi(u)$ est un polynôme satisfaisant à l'équation (4 bis), la quadrature précédente pourra s'effectuer complètement.

Remarques. — I. Les équations (3) ont été employées par M. Bioche pour la démonstration d'une propriété des courbes de J. Bertrand (*Bulletin de la Soc. mathém. de France*, 1889, p. 109).

II. Il existe un autre procédé, dû à M. Darboux, pour trouver *toutes* les courbes satisfaisant à l'équation (1) (voir G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 43). Les quadratures qui figurent dans les formules de M. Darboux *peuvent aussi se réduire à une seule*, par des changements convenables de variables et des fonctions, dans des cas très étendus.

2. Nous allons, à titre d'application, traiter deux exemples, dont le premier nous fera connaître un exemple de courbe gauche *algébrique* à courbure constante.

EXEMPLE I : *Courbes gauches à rayon de courbure constant* (courbes de Monge). — Ces courbes satisfont à la relation

$$R = a;$$

on a

$$\begin{aligned} x &= a \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 + \psi'^2}}{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}} \sin u \, du, \\ y &= -a \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 + \psi'^2}}{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}} \cos u \, du, \\ z &= a \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 + \psi'^2}}{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}}} \psi(u) \, du; \end{aligned}$$

dans le cas où $\psi(u) = \text{tangu}$, les quadratures précédentes deviennent

$$\begin{aligned} x &= a \int \sin u \cos u \sqrt{1 + \cos^2 u} \, du, \\ y &= -a \int \cos^2 u \sqrt{1 + \cos^2 u} \, du, \\ z &= a \int \sin u \sqrt{1 + \cos^2 u} \, du, \end{aligned}$$

et elles peuvent s'effectuer complètement en prenant

$\frac{u}{2} = t$ comme variable indépendante; la courbe correspondante

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4\sqrt{2}}{5} a \cos^5\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{5} a \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{15} a \cos\left(\frac{3u}{2}\right) - \frac{4\sqrt{2}}{5} a \sin^4\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right), \\ y &= -\frac{2\sqrt{2}}{5} a \sin^5\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{5} a \sin\left(\frac{u}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{15} a \sin\left(\frac{3u}{2}\right) - \frac{6\sqrt{2}}{5} a \cos^4\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right), \\ z &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} a \cos^3\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

est algébrique.

EXEMPLE II : *Courbes de M. Mannheim.* — *Les normales principales de ces courbes sont binormales d'une autre courbe (voir E. GOURSAT, Analyse, t. I, p. 559, pour la bibliographie de ces courbes).*

Comme on a ici

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{a}{R},$$

il vient

$$\varphi_1(u) = \frac{a(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \psi^2 + \psi'^2)^{-\frac{3}{2}}}{(1 + \psi^2)^3 (1 + \psi^2 + \psi'^2) + (\psi + \psi'')^2};$$

par suite, les coordonnées d'un point de ces courbes seront déterminées par les quadratures

$$\begin{aligned} x &= a \int \frac{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \psi^2 + \psi'^2)^{-\frac{3}{2}} \sin u \, du}{(1 + \psi^2)^3 (1 + \psi^2 + \psi'^2) + (\psi + \psi'')^2}, \\ y &= -a \int \frac{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \psi^2 + \psi'^2)^{-\frac{3}{2}} \cos u \, du}{(1 + \psi^2)^3 (1 + \psi^2 + \psi'^2) + (\psi + \psi'')^2}, \\ z &= a \int \frac{(1 + \psi^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \psi^2 + \psi'^2)^{-\frac{3}{2}} \psi \, du}{(1 + \psi^2)^3 (1 + \psi^2 + \psi'^2) + (\psi + \psi'')^2}. \end{aligned}$$

Si, par exemple, on a

$$\psi(u) = u,$$

les formules précédentes deviennent

$$x = a\sqrt{2} \int \frac{\sin u}{9u^2 + 16} d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}}\right),$$

$$y = -a\sqrt{2} \int \frac{\cos u}{9u^2 + 16} d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}}\right),$$

$$z = a\sqrt{2} \int \frac{u}{9u^2 + 16} d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}}\right).$$