Certificats de mathématiques préparatoires aux sciences physiques et industrielles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 378-384
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__378_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES AUX SCIENCES PHYSIQUES ET INDUSTRIELLES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Sur la surface dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est* $z^2 = 2ay$, *déterminer une courbe* C *dont les tangentes font un même angle* θ *avec le plan des* xy; *construire les projections de* C.

Lorsque $\tang\theta$ *est* $\frac{1}{2}$, *la projection sur* OXY *est une cycloïde.*

II. *Deux points* M, M' *de masse* 1 *se repoussent avec une force égale à* 6MM'; *en outre, chacun d'eux est attiré vers l'origine de deux axes rectangulaires* OX, OY, *par une force égale à seize fois sa distance au point* O. *A l'instant initial, les deux points sont sur l'axe des* x, M *ayant une abscisse* $3a$ *et une vitesse nulle,* M' *une abscisse* $-a$ *et une vitesse* $8a$ *parallèle à* OY. *Chercher, en fonction du temps, les coordonnées* x, y, x', y' *des deux points; reconnaître qu'ils suivent une même trajectoire et déterminer cette courbe.*

SOLUTION.

Le mouvement a lieu dans le plan XOY et ses équations sont linéaires : en les combinant par addition et soustraction, on arrive aux intégrales

$$\begin{aligned} x &= 2a\cos 2t + a\cos 4t, & y &= -2a\sin 2t + a\sin 4t,\\ x' &= -2a\cos 2t + a\cos 4t, & y' &= 2a\sin 2t + a\sin 4t. \end{aligned}$$

Trajectoire commune : hypocycloïde; cercle de rayon a roulant dans un cercle de rayon $3a$. (Juin 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère deux courbes* C, C′ *respectivement décrites par les points* M, M′ *dont les coordonnées rectangulaires sont de la forme* $R\cos\theta$, $R\sin\theta$, $a\theta$ *pour* M; $R\cos\theta'$, $R\sin\theta'$, $-a'\theta'$ *pour* M′.

Montrer que, si l'on fait θ' *égal à* θ, *les tangentes à* C *en* M *et à* C′ *en* M′ *se coupent en un point* P *dont le lieu est une développante de cercle orthogonale à* MP *et à* M′P.

L'angle MPM′ *est constant : dans le cas où il est droit, calculer le volume* V *engendré par le triangle* MPM′ *et l'aire* A *décrite par son périmètre quand* θ *croît de* 0 *à* π.

SOLUTION.

$$V = \frac{\pi^4 R^2}{24}\,\frac{a^2+R^2}{a},$$

$$A = \frac{\pi^2 R\sqrt{a^2+R^2}}{6}\,\frac{\pi(a+R)+2\sqrt{a^2+R^2}}{a}.$$

II. *Mouvement d'un point non pesant assujetti à se mouvoir sur un cône dont les génératrices font avec l'axe un angle de* 30° *et attiré vers le sommet du cône par une force proportionnelle à la distance.*

CALCUL. — *Sur une sphère de* 10m *de rayon, on considère un triangle* ABC; *on donne les longueurs des côtés* b, c *et l'angle* A : *calculer les angles* B, C *et la surface en mètres carrés.* (Novembre 1904.)

Épreuve écrite. — I. *Étant donné sur une sphère un grand cercle* (C), *de pôles* A, A', *à un point quelconque* M *de la sphère on fait correspondre :*

1° *La projection* P *de* M *sur le plan du cercle* (C);

2° *L'intersection* Q *de* (C) *avec le demi-cercle* AMA'.

Sur quelle courbe (Γ) *doit se déplacer* M *pour que les points* P *et* Q *décrivent des arcs égaux? Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (Γ) *et rectifier l'une de ces trajectoires à partir du cercle* (C).

Solution.

(Γ) est une courbe de Viviani; trajectoires :

$$\psi - \psi_0 = \cot\theta.$$

II. *On donne deux cercles* (C), (C') *ayant même axe* OO'; *deux points* M, M' *sont assujettis à rester l'un sur le cercle* (C), *de rayon* R, *l'autre sur* (C'), *de rayon* $\frac{1}{2}$R : *ils ont chacun une masse* 1 *et s'attirent avec une force* μ^2MM'. *Trouver le mouvement des deux points en supposant leurs vitesses initiales nulles.*

Calcul. — *A deux heures sidérales données,* t, t', *une certaine étoile circompolaire a des hauteurs* h, h' *et un même azimut* α : *calculer cet azimut ainsi que la latitude, supposée boréale, du lieu de l'observation.*

(Juillet 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite : I. Géométrie analytique et Analyse. — 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et un cercle* (C) *de rayon* R *et de centre* K, *tangent à* Oy *en* O, *montrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur les tangentes au cercle* (C) *est une cardioïde* Γ.

2° M *et* M' *étant deux points de* (Γ) *tels que l'angle* MOM' *soit droit, trouver le lieu du milieu du segment* MM'.

3° M *désignant un point quelconque de* (Γ) *et* P *un point de la droite* OM *tel que le produit* OM.OP *soit égal à une constante* λ^2, *montrer que le point* P *décrit une* *parabole quand* M *décrit* (Γ); *trouver les trajectoires orthogonales des paraboles obtenues en faisant varier* λ.

4° *La cardioïde* (Γ) *rencontre, en dehors de l'origine, l'axe* Ox *en un point* A *et l'axe* Oy *en deux points* B, B′ : *calculer l'aire de la surface* (Σ) *engendrée par la rotation de l'arc* AB *autour de* Ox; *calculer aussi le volume compris entre cette surface* (Σ) *et un plan mené par* O *perpendiculairement à* Ox.

5° *Calculer l'aire de la partie de la surface de la sphère de centre* O *et de rayon* 2R *qui est comprise à l'intérieur d'un cylindre dont la base est la cardioïde* (Γ) *et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan* xOy; *calculer de même l'aire de la surface latérale du cylindre ainsi limité.*

II. Mécanique. — *Réduction d'un système de six vecteurs.*

Longueurs des vecteurs :

$$OA = 2^{m},\qquad OB = 1^{m},\qquad CD = 3^{m},$$
$$EF = 4^{m},\qquad GH = 3^{m},\qquad OL = 2^{m}.$$

Les positions respectives des vecteurs sont définies par les données suivantes : $\widehat{AOB} = 60^{\circ}$; CD *et* EF *sont perpendiculaires au plan* AOB, *les points* C *et* E *sont sur les prolongements de* OA *et* OB, *et l'on a*

$$OC = 5^{m},\qquad OE = 3^{m};$$

GH, *dans le plan* AOB, *est perpendiculaire à la bissectrice* OG *de l'angle* AOB, *et l'on a*

$$OG = 6^{m};$$

OL *est situé dans le plan mené perpendiculairement à* AOB *par* OG, *et l'on a*

$$\widehat{GOL} = 45^{\circ}.$$

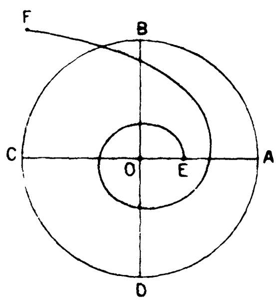
(Juillet 1905.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Un petit volant* ABCD *mobile autour d'un axe vertical* O *est assimilable à un anneau très mince de rayon* R *centimètres et de poids* P *grammes.*

Un ressort spiral plat d'élasticité parfaite a l'une de ses extrémités fixée en F *et l'autre extrémité attachée en* E *à l'un des bras* OA *du volant, à une distance* OE $= \rho$ *centimètres de l'axe.*

On tourne le volant d'un angle α *radiant dans le sens*



des aiguilles d'une montre à partir de la position d'équilibre. Le ressort exerce alors sur le bras du volant un effort perpendiculaire de f *grammes.*

On abandonne alors sans choc le système à lui-même :

1° *Étudier le mouvement du volant;*

2° *Prenant*

$$\mathrm{R} = 2^{\mathrm{cm}},5, \qquad \rho = \frac{\mathrm{R}}{2}, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{3}, \qquad f = 0^{\mathrm{g}},6,$$

déterminer P *de manière que le volant batte la seconde.*

Nota. — *On négligera le poids des bras du volant.*

II. *Une courbe a pour équation par rapport à deux axes rectangulaires*

$$x - y = b\,e^{\frac{y}{a}},$$

a et b étant des longueurs données, dont la première est positive.

1° *Construire cette courbe et calculer l'aire qui, dans la région des* y *négatifs, est limitée par la courbe, l'axe des* x *et la bissectrice de l'angle* $x\mathrm{O}y$.

2° *Considérant ensuite b comme un paramètre variable,* *trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées par cette même équation.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la valeur de l'expression*

$$\frac{a^{2,157}\, b^{-\frac{1}{7}}}{\operatorname{arc\,tang}\theta\,(c^3 + a\theta\, \mathcal{L}b)},$$

dans laquelle on a

$$a = 26, \qquad b = 7,432, \qquad c = 0,245,$$
$$\theta = 0,0523.$$

N.-B. — *$\mathcal{L}b$ signifie logarithme népérien de b.*

(Novembre 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On donne dans un plan une circonférence de centre* K *et de rayon* a, *et un point* A *sur cette circonférence.*

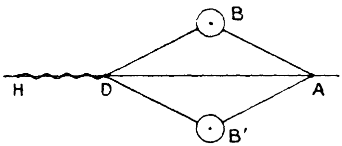
Trouver dans ce plan une courbe Γ *dont le rayon de courbure en un point* M *soit égal à la corde du cercle* K *issue de* A *parallèlement à la tangente en* M.

L'axe des x étant parallèle au diamètre AK, *déterminer les constantes d'intégration de manière que* Γ *passe par l'origine* O *des coordonnées et soit normale en ce point à l'axe des x.*

L'arc de courbe ainsi déterminé ira couper une seconde fois l'axe des x en un point B *dont on calculera l'abscisse. Trouver la longueur de l'arc de courbe* OB, *l'aire comprise entre cet arc et l'axe des x, les coordonnées du centre de gravité de cette aire.*

II. *Sur un axe* HORIZONTAL *animé d'une rotation uniforme* ω *est monté un régulateur à force centrifuge formé d'un losange articulé* ABB′D. *Le sommet* A *est fixé en un point de l'axe, les sommets* B *et* B′ *portent des masses égales* M, *et le sommet* D, *qui peut glisser le long de l'axe, est attaché à l'extrémité d'un ressort à boudin dont l'autre extrémité est fixée en un point* H *de l'axe. Le ressort exerce une force de* E *kilogrammes pour un allongement* *égal à l'unité de longueur. Quel sera l'allongement du ressort dans l'état d'équilibre relatif du régulateur?*

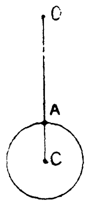
On appellera l la longueur naturelle du ressort, a la



longueur des tiges du régulateur, et $2c+l$ la distance HA.

On négligera le poids des tiges et les frottements.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule est formé d'une tige* OA *très mince et de poids négligeable, soudée à un disque circulaire, homogène, pesant, suivant le prolongement d'un de ses rayons* CA. *L'axe de suspension, qui passe*



en O, *est horizontal et perpendiculaire au plan du disque.*

On donne :

$$OA = 0^m,753, \qquad CA = r = 0^m,228, \qquad g = 9^m,81.$$

1° *Calculer la durée d'oscillation de ce pendule.*

2° *On pratique dans le disque un trou circulaire et concentrique. Quel doit être le rayon de ce trou, pour que le pendule ainsi modifié batte la seconde?*

(Juillet 1903.)