NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 373-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__373_0>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Déterminer l'intégrale de l'équation* $pq = xy$ *qui se réduit à*

$$\sqrt{1+y^2} \qquad \textit{pour} \qquad x = 1.$$

Solution.

$$z = x\sqrt{1+y^2}.$$

II. *Déterminer une surface dont les asymptotiques se projettent sur le plan des* xy *suivant les développantes du cercle*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

Solution.

$$z = Cx + C'y + C'' + e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \alpha}.$$

(Juillet 1905.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Lignes asymptotiques de la surface engendrée par la rotation de la courbe* $z = f(x)$ *tournant autour de* Oz.

Application :

$$z = \pm \frac{x}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{3a}{2}\log\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

On construira la courbe méridienne.

Épreuve pratique. — *On considère les surfaces*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz \qquad \textit{et} \qquad ax^2 + by^2 = z^2,$$

et l'on demande :

1° *D'étudier la projection sur* xOy *de l'intersection de ces deux surfaces;*

2° *D'évaluer l'aire de la portion de la première surface qui est comprise à l'intérieur de la seconde.*

On considérera successivement les deux cas suivants :

$$a > b > 1, \qquad a > 1 > b > 0.$$

(Juillet 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Un cercle de rayon donné* R *a pour centre un point situé sur* Ox *à la distance* x_0 *de l'origine* O *des coordonnées rectangulaires. Ce cercle a pour axe* Ox.

Déterminer la surface passant par ce cercle et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = 0.$$

Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.

Solution.

On trouve le conoïde

$$x_0^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + z^2 = R^2.$$

Épreuve pratique. — *Le point* z *décrit dans le plan des* z *un chemin allant du point* $z_0 = \sqrt{-1}$ *au point*

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)\sqrt{-1}$$

sur une chaînette symétrique par rapport à l'axe des y.

La lettre e *désigne le nombre connu.*

Calculer la longueur de ce chemin à 0,001 *près.*

Solution.

1,175 par défaut. (Juillet 1905.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Un cylindre de révolution est représenté par les équations*

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t.$$

1° *Déterminer une courbe* C *tracée sur le cylindre, telle que son rayon de courbure vérifie la relation*

$$R \sin^2 \varphi = \frac{a}{\sqrt{1+b^2}},$$

où φ *est l'angle de la tangente à la courbe avec la génératrice du cylindre et* b *une constante.*

2° *Calculer le rayon de courbure, le rayon de torsion et le rayon de la sphère osculatrice en un point de la courbe* C *obtenue.*

3° *Démontrer que le rayon de torsion* T *vérifie la relation*

$$T \sin 2\varphi = 2a.$$

4° *Déterminer les courbes plus générales tracées sur le cylindre telles que*

$$T \sin 2\varphi = 2a + C \sin^2 \varphi.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface*

$$z = xy^2.$$

2° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface*

$$z = x^\alpha y^\beta,$$

α *et* β *étant des constantes.* (Juillet 1905.)

Rennes.

EPREUVE ÉCRITE : I. CALCUL INTÉGRAL. — *On donne l'équation différentielle* E_α

$$(E_\alpha) \quad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+2)x - (\alpha+1)]\frac{dy}{dx} + \frac{2\alpha+1}{4}y = 0,$$

où α *désigne une constante.*

1° *Montrer que* (E_α) *admet deux intégrales* y_0 *et* y_1 *telles que*

$$y_0 = \varphi(\alpha, x), \qquad y_1 = x^{-\alpha}\varphi(-\alpha, x)$$

$\varphi(\alpha, x)$ *désignant une série entière en* x *dont les coefficients dépendent de* α, *et égale à* 1 *pour* $x = 0$.

2° *Trouver la limite vers laquelle tend le rapport* $\frac{y_0 - y_1}{\alpha}$ *quand* α *tend vers zéro.*

3° *Calculer la transformée de* E_α *définie par le changement de variable* $x = \frac{1}{t}$ *et par le changement de fonction*

$$y = t^{\frac{1}{2}} T,$$

et comparer cette transformée à l'équation $E_{-\alpha}$.

4° *Étudier les intégrales de l'équation* E_0 *à laquelle se réduit* E_α, *pour* $\alpha = 0$, *dans le voisinage de chacun des trois points*

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = \infty.$$

II. Calcul différentiel. — 1° *Vérifier que l'équation*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \text{arc tang} \frac{y}{x} - \text{arc tang} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

représente la surface développable S *dont les plans tangents ont pour équation*

$$z = x \sin t + y \cos t + t,$$

t étant un paramètre variable.

2° *Trouver l'arête de rebroussement et les lignes de courbure de la surface* S. (Juillet 1905.)

SOLUTION.

I. La série $\varphi(\alpha, x)$ s'obtient en faisant

$$a = \tfrac{1}{2}, \qquad b = \alpha + \tfrac{1}{2}, \qquad c = \alpha + 1$$

dans la série hypergéométrique

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a+n-1).b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1.2\ldots n.c(c+1)\ldots(c+n-1)} x^n.$$

On a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{y_0 - y_1}{\alpha} = \varphi(0, x) \log x + 2\varphi'_\alpha(0, x)$$

et

$$\varphi'_\alpha(0, x) = 2\sum x^n \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} \end{array} \right\}.$$

L'équation E_α admet les deux intégrales

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi\left(-\alpha, \frac{1}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \varphi\left(\alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Les résultats précédents font connaître un système fondamental d'intégrales de E_0 dans le domaine de chacun des points $x = 0$, $x = \infty$.

Pour avoir un pareil système dans le domaine du point $x = 1$, il suffit de remarquer que l'équation différentielle E_0 ne change pas quand on change x en $1 - x$.

E_0 est l'équation différentielle des périodes de l'intégrale elliptique normale de première espèce ($k^2 = x$). En chacun de ses trois points singuliers, l'équation déterminante a une racine double.

Toulouse.

Epreuve écrite. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x + \frac{d^2 y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} - 11 y = 0,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} - 2y = 0.$$

II. *a désignant une constante réelle choisie de façon que l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx$$

ait un sens, calculer la valeur de cette intégrale.

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$p^2 - 2pq + 2q^2 - 4z = 0,$$

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonction inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y.

Intégrer cette équation et déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont

$$x = 0, \qquad z = y^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer la forme générale des courbes représentées en coordonnées polaires (θ, r) par l'équation*

$$d\theta = \frac{a^2 r - 1}{r - 5} \sqrt{\frac{r - 2}{r^4 - 19r + 20}}\, dr,$$

où a désigne une constante réelle. (Juillet 1905.)