NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. GOMES TEIXEIRA

Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 36-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__36_1>

[D6b]

SUR UNE FORMULE POUR LE CALCUL NUMÉRIQUE DES LOGARITHMES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

Je me propose de donner ici une formule pour le calcul des valeurs des logarithmes des nombres, laquelle me paraît pouvoir être utile en quelques circonstances.

Je considère, pour cela, la fonction rationnelle

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n}$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \ldots + \frac{A_n}{t^n}$$
$$+ \frac{B_1}{t-a} + \frac{B_2}{(t-a)^2} + \frac{B_3}{(t-a)^3} + \ldots + \frac{B_n}{(t-a)^n}.$$

Pour déterminer $A_1, A_2, \ldots, A_n$, je développe le binome $(h-a)^{-n}$ en série ordonnée suivant les puissances de h, ce qui donne

$$(h-a)^{-n} = \frac{(-1)^n}{a^n}\left[1 + \binom{n}{1}\frac{h}{a} - \binom{n+1}{2}\frac{h^2}{a^2} + \binom{n+2}{3}\frac{h^3}{a^3} + \ldots + \binom{2n-2}{n-1}\frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots\right].$$

On a donc

$$A_1 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$
$$A_2 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2},$$
$$A_3 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{n-2} = \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2},$$
$$A_{n-1} = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n}{1},$$
$$A_n = \frac{(-1)^n}{a^n}.$$

Pour déterminer $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, on doit poser $t = a + h$ dans la fraction $\frac{1}{t^n}$, et développer le résultat suivant les puissances de h, ce qui donne

$$(a+h)^{-n}$$
$$= \frac{1}{a^n}\left[1 - \binom{n}{1}\frac{h}{a} + \binom{n+1}{2}\frac{h^2}{a^2} - \binom{n-2}{3}\frac{h^3}{a^3} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots\right]:$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{(-1)^{n-1}}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}, \\
B_2 &= \frac{(-1)^{n-2}}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}, \\
B_3 &= \frac{(-1)^{n-3}}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_{n-2} &= \frac{(-1)^2}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2}, \\
B_{n-1} &= \frac{(-1)}{a^{n+1}}\binom{n}{1}, \\
B^n &= \frac{1}{a^n}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n(t-a)^n} = {} & \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-a}\right) \\
& + \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t-a)^2}\right) \\
& + \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3}\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t-a)^3}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n+1}{2}\left(\frac{1}{t^{n-2}} + (-)^{n-2}\frac{1}{(t-a)^{n-2}}\right) \\
& + \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n}{1}\left(\frac{1}{t^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{(t-a)^{n-1}}\right) \\
& + \frac{(-1)^n}{a^n}\left(\frac{1}{t^n} + (-1)^n\frac{1}{(t-a)^n}\right).
\end{aligned}$$

En intégrant maintenant les deux membres de cette identité et en prenant l'intégrale entre les limites x et ∞, on trouve, en supposant $x > a > 0$,

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \log\frac{x-a}{x}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}} \binom{2n-3}{n-2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a}\right)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}} \binom{2n-4}{n-3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{a^{n+2}} \binom{n+1}{n} \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{x^{n-3}} + (-1)^{n-2} \frac{1}{(x-a)^{n-3}}\right)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \binom{n}{1} \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{x^{n-2}} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-2}}\right)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{a^n} \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right),$$

et, par conséquent,

$$\log\frac{x}{x-a}$$

$$= a \frac{n-1}{2n-2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a}\right)$$

$$+ \frac{a^2}{2} \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)$$

$$+ \frac{a^3}{3} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-a)^3}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{a^{n-2}}{n-2} \frac{(n-1)(n-2)\ldots 3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)} \left(\frac{1}{x^{n-2}} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-2}}\right)$$

$$+ \frac{a^{n-1}}{n-1} \frac{(n-2)(n-3)\ldots 2.1}{(2n-1)(2n-2)\ldots n} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right)$$

$$-(-1)^n a^{2n-1} \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n}.$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n} < \frac{1}{x^n}\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n},$$

et, par suite, en représentant par R_n le dernier terme de l'égalité précédente,

$$R_n = a^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n}$$

$$< a^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-a)^{n-1}}.$$

On voit, au moyen de cette inégalité, que R_n tend vers *zéro* quand n tend vers l'infini, si $x \overline{\gtrless} 2a$; et, dans ce cas, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&\log x - \log(x-a)\\
&= \lim_{n=\infty}\Big[a\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}\right)\\
&\qquad + \frac{a^2}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right)\\
&\qquad + \frac{a^3}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x-a)^3}\right)\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad + \frac{a^{n-2}}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 3\,2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{(x-a)^{n-2}}\right)\\
&\qquad + \frac{a^{n-1}}{n-1}\,\frac{(n-1).(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(x-a)^{n-1}}\right)\Big].
\end{aligned}$$

Cette formule, que nous croyons nouvelle, sans en être certain, est celle que nous nous proposions de démontrer. Elle donne la valeur de la différence entre les logarithmes des nombres x et $x-a$ avec une erreur inférieure à

$$a^{2n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-a)^{n-1}},$$

et peut être principalement utile quand le nombre représenté par a est petit et le nombre représenté par x est grand.

En posant $a=1$, on trouve la formule

$$\begin{aligned}
&\log x-\log(x-1)\\
&=\lim_{n=\infty}\left[\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\right.\\
&\qquad+\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+\frac{1}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}}\right)\\
&\qquad\quad\left.+\frac{1}{n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n-1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

qui donne la valeur de la différence des logarithmes des deux nombres consécutifs x et $x-1$ avec une erreur inférieure à

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-1)^{n-1}},$$

et qui a lieu quand $x \overline{\gtrless} 2$.

On déduit, comme corollaire de cette formule, que la différence des logarithmes des nombres x et $x-1$ peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2.10^3}$, quand $x>10$, à $\frac{1}{2.10^6}$, quand $x>100$, à $\frac{1}{2.10^9}$, quand $x>1000$, etc.

On voit, de la même manière, que la différence des logarithmes des nombres x et $x - 1$ peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{12.10^5}$, quand $x > 10$, à $\frac{1}{12.10^{10}}$, quand $x > 100$, etc.

Parmi les formules qui résultent de la formule générale précédemment écrite, nous indiquerons encore la suivante

$$\begin{aligned}
\log\frac{x+1}{x-1}
&= \lim_{n=\infty}\Bigg[2\,\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \\
&\quad + \frac{2^2}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) \\
&\quad + \frac{2^3}{3}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}\right) \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \frac{2^{n-2}}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{(x+1)^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}}\right) \\
&\quad + \frac{2^{n-1}}{n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{(x+1)^{n-1}} + \frac{(-1)^{n}}{(x-1)^{n-1}}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

qu'on obtient en y remplaçant x par $x+1$ et en posant $a = x$.

Cette formule a lieu quand $x > 3$ et donne $\log\frac{x+1}{x-1}$ avec une erreur inférieure à

$$2^{2n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x+1)^n(x-1)^{n-1}}.$$