NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CLAPIER

Concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1905 (mathématiques élémentaires)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 367-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__367_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1905 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES);

SOLUTION PAR M. CLAPIER.

On donne un cercle C *de centre* O *et de rayon* R, *un point fixe* K *à l'intérieur de ce cercle. Un rayon lumineux* FK, *émanant d'un point* F *de la circonférence du cercle* C, *se réfléchit en* K *sur le diamètre* OK *et va rencontrer la circonférence de* C *en un point* E. *Soit* M *le milieu de la corde* EF *et soit* AB *la corde de* C *perpendiculaire au diamètre* OK *au point* K.

1° *Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle* MAB *quand* F *décrit la circonférence du cercle* C.

2° *Étudier, dans les mêmes conditions, comment varie le cercle passant par les centres des trois cercles exinscrits au triangle* MAB.

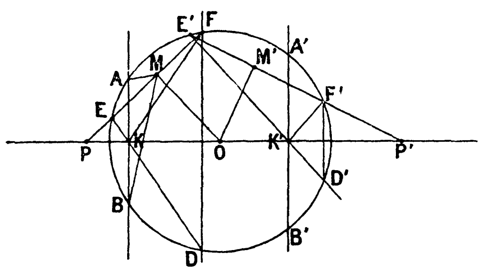
3° *On prend un second point* K' *fixe, intérieur à* C *et situé sur le diamètre* OK. *Un rayon lumineux* F'K', *parallèle à* FK, *se réfléchit en* K' *sur ce diamètre et rencontre en* E' *la circonférence du cercle* C. *Trouver le lieu du point de rencontre de* EF *et de* E'F' *lorsque* F *et* F' *se déplacent sur la circonférence du cercle* C. *Étudier ce lieu en supposant que* K *et* K' *se déplacent sur un diamètre fixe et de telle sorte que le milieu de* KK' *reste fixe.*

4° *Soit* M' *le milieu de* E'F'. *La droite* MM' *rencontre le lieu de* M *en un nouveau point* H *et celui de* M' *en un nouveau point* H'. *Étudier le cercle circonscrit au triangle* HOH' *et la perpendiculaire au milieu de* HH'.

5° *Soit h le point qui partage* HH′ *dans un rapport donné m. Démontrer que le lieu du point h est en général une ellipse. Examiner comment varient les cercles principaux de cette ellipse quand le rapport m varie.*

I. Soit EKF le trajet suivi par un rayon lumineux issu d'un point E de la circonférence (C) et se réfléchissant sur le diamètre $\overline{PP'}$. La normale KA à ce diamètre est bissectrice de $\widehat{EKF}$; par suite, le faisceau K(PEAF) est harmonique et la corde EF va passer par un point fixe P, pôle de la normale AB (*fig.* 1).

Fig. 1.



Il en résulte que le point M, milieu de EF, décrit la circonférence de diamètre OP passant par A et B.

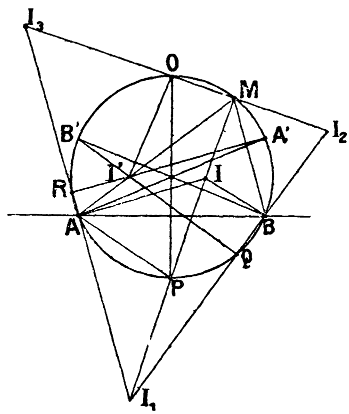
Cherchons comment varient les centres des cercles qui touchent les côtés du triangle AMB dont le cercle circonscrit est fixe.

Ce cercle de diamètre OP passe par les points A et B (*fig.* 2). Les bissectrices de $\widehat{AMB}$ sont MP et MO et, si l'on désigne par I et I_1, I_2 et I_3 les centres des cercles inscrits, on sait que le point P est le milieu de $\overline{II_1}$ et le point O est le milieu de $\overline{I_2 I_3}$; d'ailleurs, le triangle AIP est isoscèle et l'on a

$$PI = PA$$

et le lieu des centres I ou I_1 est précisément la circonférence de centre P, orthogonale à la circonférence (C);

Fig. 2.



les deux autres centres I_2 et I_3 sont tels que l'on a

$$OI_2 = OA = OI_3$$

et se meuvent sur le cercle de centre O, orthogonal à (C).

II. Les milieux des côtés du triangle $I_1I_2I_3$ formé par les centres des cercles exinscrits sont les points O, Q, R situés sur le cercle circonscrit.

Soient A' et B' les extrémités des diamètres de ce cercle issus des points A et B; le centre du cercle qui passe par les points I_1, I_2, I_3 est à l'intersection de $\overline{RA'}$ et $\overline{QB'}$; l'angle formé par ces droites est constant et égal à $\widehat{AIB}$ et le lieu de ce centre I' est la circonférence de centre O passant par A' et B' : en effet, une rotation de 180° autour du centre du cercle circonscrit amènerait $\overline{IA}$, $\overline{IB}$, $\overline{IP}$ sur la position $\overline{I'A'}$, $\overline{I'B'}$, $\overline{I'O}$; de sorte que $\overline{I'O}$ est égal et parallèle à $\overline{IP}$.

Le triangle ROQ est inscrit dans un cercle fixe qui est le cercle des neuf points relatif au triangle $I_1 I_2 I_3$; le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est double du rayon du précédent, il est donc constant.

Ainsi, le centre I' est à une distance $\overline{OP}$ des points I_1, I_2, I_3 et la circonférence qui passe par ces trois points se meut de manière que son rayon soit fixe et que son centre décrive une circonférence.

III. Pour construire le rayon réfléchi KF, il suffit de prolonger le rayon incident jusqu'au point de rencontre D avec la circonférence C et de mener $\overline{DF}$ perpendiculaire au diamètre $\overline{OP}$ (*fig.* 1). Si l'on fait cette construction pour un rayon $E'K'$ parallèle à EK, les arcs EE', DD', FF' sont égaux, et, par suite, les cordes EF, $E'F'$ sont égales.

La bissectrice de l'angle qu'elles forment va passer par le point O et leurs milieux M et M' sont à égale distance de ce point. Si l'on désigne par O' le conjugué harmonique du point O par rapport aux pôles P et P', il est clair que le point de rencontre des rayons réfléchis EF, $E'F'$ décrit la circonférence de diamètre OO'; cette circonférence est fixe, lorsqu'on suppose que les points K et K' se déplacent sur le diamètre réfléchissant de manière que leur milieu soit fixe ; en effet, nous avons la relation

$$\overline{OP} \times \overline{OK} = R^2,$$

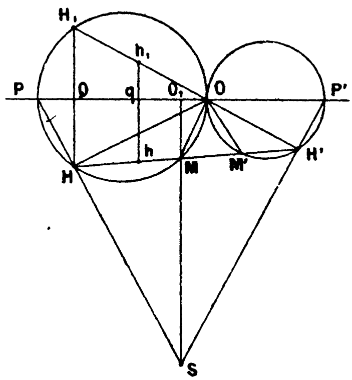
$$\overline{OP'} \times \overline{OK'} = R^2,$$

$$\frac{2}{\overline{OO'}} = \frac{1}{\overline{OP}} - \frac{1}{\overline{OP'}} = \frac{OK - OK'}{R^2};$$

si le milieu de KK′ est donné, $\overline{OK} - \overline{OK'}$ est déterminé et le segment $\overline{OO'}$ est constant.

IV. Les lieux des points M et M′ sont les cercles de diamètre OP et OP′, et, de plus, OM = OM′ (*fig.* 3);

Fig. 3.



désignons par H et H′ les points où la droite MM′ coupe ces cercles et joignons PH, P′H′; les deux quadrilatères inscriptibles OPHM, OP′H′M′ montrent que les angles $\widehat{OPH}$, $\widehat{OP'H'}$ sont égaux respectivement aux angles à la base du triangle isoscèle OMM′; donc le triangle PSP′ est lui-même isoscèle et le point S, intersection de PH, P′H′, décrit la perpendiculaire au milieu O_1 de $\overline{PP'}$. Le cercle décrit sur OS comme diamètre passe par les points H, H′ et O_1; donc le cercle circonscrit au triangle OHH′ passe par un second point fixe O_1; de plus, puisque O_1S est la bissectrice de $\widehat{HSH'}$, la perpendiculaire au milieu de HH′ pivote autour du point O_1.

V. Les angles $\widehat{POH}$, $\widehat{P'OH'}$ compléments des angles à la base du triangle isoscèle PSP′ sont égaux et, si l'on prend le symétrique H_1 de H par rapport au diamètre $\overline{PP'}$, les trois points H_1, O, H′ sont en ligne droite.

Soit h le point qui partage HH′ dans le rapport donné m; menons $\overline{hqh_1}$ perpendiculaire à PP′; nous avons les relations

$$\frac{h\mathrm{H}}{h\mathrm{H}'} = \frac{h_1\mathrm{H}_1}{h_1\mathrm{H}'} = m,$$

$$\frac{qh_1}{\mathrm{HH}_1} = \frac{qh_1}{2\mathrm{QH}_1} = \frac{\mathrm{O}h_1}{2\mathrm{OH}_1},$$

$$\frac{hh_1}{\mathrm{HH}_1} = \frac{\mathrm{H}'h}{\mathrm{H}'\mathrm{H}}.$$

De la première on déduit que le rapport $\frac{\mathrm{O}h_1}{\mathrm{OH}_1}$ est constant, car O et h_1 partagent tous deux $\mathrm{H}'\mathrm{H}_1$ dans un rapport constant. Par suite, le point h_1 décrit une circonférence de diamètre OT; les deux autres relations montrent que le rapport $\frac{qh_1}{hh_1}$, et par suite $\frac{qh_1}{qh}$, est aussi constant et, par suite, le lieu du point h est la figure homologique du lieu du point h_1; c'est une ellipse admettant comme cercle principal la circonférence précédente.

Dans le cas de la figure, c'est-à-dire quand le point h est situé entre les points H et H′, le petit axe de l'ellipse est OT, $\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP}'}$ étant égal à m; si le point h était situé en dehors des points H et H′, $\overline{\mathrm{OT}}$ serait le grand axe de l'ellipse.