LANCELOT

Détermination d'une surface algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 357-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__357_1>

[$M^2 1 a$]

DÉTERMINATION D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

PAR M. LANCELOT.

Soit une surface algébrique de degré m. Son équation, en coordonnées homogènes,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

a pour premier membre un polynome homogène en x, y, z, t, comprenant un nombre de termes égal à Γ_4^m (nombre des combinaisons avec répétition de quatre lettres m à m). Il comprend donc

$$\Gamma_4^m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

paramètres homogènes ou

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{m(m^2+6m+11)}{6}$$

coefficients non homogènes.

1° Il faut donc, pour déterminer une surface,

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6}$$

conditions simples (se traduisant par une seule relation entre les coefficients) et indépendantes les unes des autres.

Par exemple, par $\frac{m(m^2+6m+11)}{6}$ points passe, en général, une surface de degré m, et une seule.

2° Par $\frac{m(m^2+6m+11)}{6}-1$ points passent une infinité de surfaces dépendant d'un paramètre. Les équations qui expriment que la surface de degré m passe par les points donnés étant linéaires, l'équation générale de ces surfaces est de la forme

$$f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)=0,$$

et ces surfaces passent toutes par une courbe qui est, en général, de degré m^2, intersection des surfaces

$$f(x,y,z,t)=0, \qquad \varphi(x,y,z,t)=0.$$

Il s'ensuit que la courbe algébrique de degré m^2, intersection de deux surfaces de degré m, est déterminée par la connaissance de

$$\frac{m(m^2+6m+11)-6}{6}=\frac{m^3+6m^2+11m-6}{6} \text{ points.}$$

Car, par tous ces points, il passe une infinité de surfaces de degré m ayant en commun une courbe de degré m^2, et une seule.

3° Par $\frac{m(m^2+6m+11)}{6}-2$ points passent une infinité de surfaces de degré m dépendant linéairement de deux paramètres

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0.$$

Ces surfaces ont en commun m^3 points : les points d'intersection des trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. On a donc le théorème suivant :

Toute surface de degré m passant par

$$\frac{m^3 + 6m^2 + 11m - 12}{6} \text{ points}$$

passe en plus par

$$m^3 - \frac{m^3 + 6m^2 + 11m - 12}{6} = \frac{5m^3 - 6m^2 - 11m + 12}{6}$$

autres points.

Isolons, parmi le système à deux paramètres de surfaces passant par les $\frac{m(m^2 + 6m + 11)}{6} - 2$ points donnés, un système à un seul paramètre. Toutes ces surfaces ont en commun une infinité de points formant une courbe de degré m^2. Comme elles vont toutes passer par les $\frac{5m^3 - 6m^2 - 11m + 12}{6}$ autres points, il s'ensuit que cette courbe de degré m^2 passe également par ces points.

On voit donc que :

1° Par $\frac{m(m^2 + 6m + 11)}{6} - 2$ points il passe une infinité de courbes de degré m^2, intersections de deux surfaces d'ordre m; toutes ces courbes ont en plus

$$\frac{5m^3 - 6m^2 - 11m + 12}{6}$$

autres points fixes.

2° Toute surface d'ordre m coupant une courbe de degré m^2, intersection de deux surfaces d'ordre m, en

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} - 2 \text{ points fixes,}$$

la coupe en

$$\frac{5m^3-6m^2-11m+12}{6}$$

autres points fixes.

Exemple. — 1° $m=2$:

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} = \frac{2(4+12+11)}{6} = 9.$$

Par 9 points passe, en général, une quadrique, et une seule.

Par 8 points passe, en général, un faisceau de quadriques ayant en commun une biquadratique gauche. Une courbe gauche du quatrième degré, intersection de deux quadriques, est déterminée par 8 points.

Par 7 points passe, en général, un réseau de quadriques ayant 8 points communs. Toute quadrique passant par 7 points passe également par un huitième.

2° $m=3$:

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} = \frac{3(9+18+11)}{6} = 19.$$

Par 19 points passe, en général, une surface du troisième degré, et une seule.

Par 18 points passe, en général, un faisceau de surfaces cubiques ayant en commun une courbe du neuvième degré.

Par 17 points passe, en général, un réseau de surfaces cubiques ayant 27 points communs. Toute surface cubique passant par 17 points passe en outre par 10 points fixes différents des 17 premiers.

Remarque. — On voit que (de même que pour la détermination des courbes planes) la donnée d'un certain nombre de points peut ne pas donner ce même nombre de conditions distinctes, la donnée de quelques-uns d'entre eux pouvant résulter nécessairement de la donnée de quelques autres.

Exemple de points non distincts pour la détermination d'une surface. — On sait qu'une surface de degré m et une courbe de degré p se coupent en mp points; et que, par suite, si une surface de degré m passe par $(mp + 1)$ points situés sur une courbe d'ordre p, elle la contient tout entière.

La donnée de ces $(mp + 1)$ points entraîne donc celle d'une infinité d'autres comprenant tous les points de la courbe.

Ainsi, la donnée de 3 points situés sur une même droite entraîne, pour une quadrique, celle de tous les points de la droite.

La donnée de 7 points d'une cubique gauche entraîne, pour une quadrique, celle de tous les points de cette cubique.

On a vu que, en général, une quadrique passant par 7 points passe par un huitième point seulement; on a donc une exception à cette règle générale et l'on est amené à distinguer deux sortes de réseaux linéaires de quadriques, les unes ayant 8 points fixes et les autres passant par une cubique gauche.

On voit en plus que, par 7 points, ne passe aucune cubique gauche en général.

Théorème. — *Si, sur les m^3 points d'intersection de trois surfaces algébriques de degré m, m^2p sont situés sur une surface de degré p inférieur à m, les*

$m^2(m-p)$ autres sont situés sur une surface de degré $m-p$.

Car, si $m^2(m-p)$ était plus petit que

$$\frac{(m-p+1)(m-p+2)(m-p+3)}{6}-1$$

(ou égal), par ces $m^2(m-p)$ points on pourrait toujours faire passer une infinité de surfaces de degré $m-p$ (ou une seule) et le théorème serait évident.

Si

$$m^2(m-p) > \frac{(m-p+1)(m-p+2)(m-p+3)}{6}-1,$$

prenons parmi les $m^2(m-p)$ points en question ce nombre de points. Ils déterminent une surface de degré $m-p$ qui, avec la surface de degré p donné, constitue une surface de degré m, passant par

$$m^2p-1+\frac{(m-p+1)(m-p+2)(m-p+3)}{6}$$

des m^3 points donnés.

Ce nombre est d'ailleurs supérieur à

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6}-2,$$

et la surface particulière de degré m considérée passe par les m^3 points donnés. C. Q. F. D.

Exemple. — Soient trois quadriques. Elles se coupent, en général, en 8 points. Si, sur ces 8 points, $m^2p=4$ ($m=2$, $p=1$) se trouvent sur un même plan ($p=1$), les 4 autres se trouvent aussi sur un même plan.

Si, sur les 27 points d'intersection de trois surfaces cubiques, 9 se trouvent sur un même plan, les 18 autres se trouvent sur une quadrique.

Ce théorème peut être regardé comme relatif à l'intersection d'une surface de degré m et d'une courbe de degré m^2, intersection de deux autres surfaces de degré m.

Soient une surface de degré m et une courbe de degré mh qui puissent être considérées comme appartenant à l'intersection d'une autre surface de degré m et d'une surface de degré h. Une surface de degré $m-h$ constitue, avec cette dernière, une surface de degré m. Les trois surfaces de degré m ainsi formées ont en commun m^3 points, dont $m^2 h$ sur la surface de degré h et $m^2(m-h)$ sur l'autre.

Par les $m^2(m-h)$ derniers points et par

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 - m^2(m-h)$$

des $m^2 h$ premiers faisons passer une surface de degré m; elle appartient au réseau et passe par les m^3 points considérés. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si, par*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 - m^2(m-h)$$

points d'une courbe de degré mh ($h < m$), *on fait passer une surface de degré* m, *elle coupe la courbe en*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} + 1 + m^3$$

autres points fixes (h *est supposé plus petit que* m) *et il faut que*

$$m^3 > \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1.$$