

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5 (1905), p. 331-336

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5_331_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1970.

(1903, p. 192.)

Le cylindre dont la section droite est la courbe représentée par l'équation intrinsèque $\rho = a - \frac{s^2}{b}$ (a et b étant des constantes positives) a la propriété CARACTÉRISTIQUE qu'on peut tracer, sur la surface, des géodésiques à courbure constante.

Ces courbes ont pour rayon de courbure géodésique \sqrt{ab} , pour rayon de courbure absolue $a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

(G. PIRONDINI.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soient

s_1 , ρ_1 et ρ_g l'arc, le rayon de courbure absolue et de courbure géodésique d'une ligne L, placée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x ;
 θ , l'inclinaison de L, sur les génératrices;
 s et ρ , l'arc et le rayon de courbure de la section droite L du cylindre.

On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \left(\frac{d\theta}{ds_1}\right)^2}, \quad \frac{1}{\rho_g} = \frac{d\theta}{ds_1} = \sin \theta \frac{d\theta}{ds}.$$

Si donc

$$\rho_g = \alpha, \quad \rho_1 = \beta,$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha\beta} \frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad \sin \theta d\theta = \frac{ds}{\alpha}.$$

Et comme on déduit d'ici

$$\cos \theta = -\frac{s}{\alpha},$$

on a

$$(1) \quad \rho = \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} (\alpha^2 - s^2).$$

Si l'on pose

$$(2) \quad \rho = a - \frac{s^2}{b},$$

la comparaison des équations (1), (2) donne

$$\alpha = \sqrt{ab}, \quad \beta = \alpha \sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

2007.

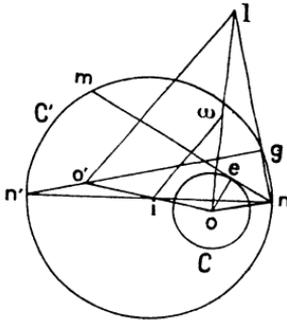
(1905, p. 96.)

On donne dans un plan deux cercles C et C' ; on mène à C une tangente variable qui coupe en m et n le cercle C' ; soit ω le centre du cercle qui passe par les points m et n et par le centre o du cercle C : quel est le lieu du point ω ?
(R. B.)

SOLUTION

Par M. Canon.

Prenons les points o' et n' symétriques de o et n par rapport au centre i du cercle C' . Menons la corde $n'o'g$, elle



est perpendiculaire à ng , comme on lui est parallèle l'angle ong est droit. La droite ng passe alors par le point l diamétralement opposé à o sur le cercle de centre ω . Le centre ω étant sur la perpendiculaire abaissée de i sur mn , le point l est aussi sur la perpendiculaire abaissée de o' sur mn .

Les triangles $o'gl$, neo sont semblables, ils donnent

$$\frac{o'l}{on} = \frac{o'g}{oe},$$

d'où

$$o'l = \frac{o'g \times on}{oe} = \frac{o'g \times o'n'}{oe} = \text{const.}$$

Le segment $o'l$ étant double du segment $i\omega$, on voit donc

que $i\omega$ est de grandeur constante et que le lieu de ω est un cercle de centre i .

Appelons R le rayon de C' , r le rayon de C , et d la distance io .

D'après ce qui vient d'être trouvé

$$o'l = \frac{R^2 - d^2}{r}$$

et alors

$$i\omega = \frac{R^2 - d^2}{2r}.$$

Remarques. — Supposons que les tangentes à C , issues de m et n , se coupent sur C' , alors elles déterminent avec mn un triangle inscrit à C' et circonscrit à C . On sait qu'alors

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

par suite

$$i\omega = R,$$

on retrouve ainsi un résultat connu.

Si l'on transforme par inversion l'énoncé de la question proposée, en prenant le point o pour pôle, on obtient cette propriété :

Un cercle D de grandeur invariable tourne autour d'un de ses points o , le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical de D et d'un cercle fixe est un cercle.

La démonstration directe est très simple, elle s'applique à ce théorème plus général :

Un cercle D de grandeur invariable tourne autour d'un point arbitraire o , le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical de D et d'un cercle fixe est un cercle.

Transformé par inversion, en mettant le pôle au point o , ce théorème donne le suivant :

Soient C' , D deux cercles qui se coupent en m , n , et ω le centre du cercle qui passe par m , n et un point arbi-

traire o : ce point ω décrit un cercle lorsque D tourne autour de o , sans varier de grandeur.

Autres solutions par MM. ABRAMESCU, BARISIEN, V. MAËS, PARROD, RETALI et TROIN.

2008.

(1895, p. 96.)

On considère un triangle fixe ABC , une direction (Δ) et un point O . On tire AO , BO , CO . On mène par A la droite (α) symétrique de AO par rapport à la direction (Δ) . On mène par B et C les droites (β) et (γ) analogues à (α) .

1° (Δ) étant donnée, le lieu du point O tel que les droites (α) , (β) , (γ) correspondantes concourent en O' est l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle et dont (Δ) est une direction asymptotique;

2° O étant l'orthocentre du triangle, O' est sur le cercle circonscrit;

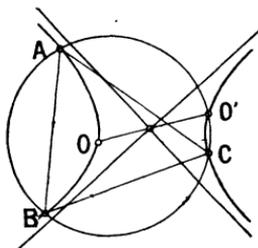
3° (Δ) étant donnée, trouver l'enveloppe de OO' .

(L. TROIN.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Étant donnés dans un plan un triangle fixe ABC , deux



points fixes Δ , Δ' et un sixième point O , si les droites α , β , γ sont respectivement conjuguées harmoniques de AO , BO , CO par rapport aux couples du rayon $A\Delta$, $A\Delta'$; $B\Delta$, $B\Delta'$; $C\Delta$, $C\Delta'$ et concourent en même point O' , les trois faisceaux

$A(\Delta\Delta'OO')$, $B(\Delta\Delta'OO')$, $C(\Delta\Delta'OO')$ sont harmoniques et par suite les deux points O , O' sont conjugués harmoniques par rapport à $\Delta\Delta'$ sur la conique $(ABC\Delta\Delta')$. Si Δ et Δ' sont à l'infini, orthogonales en direction, la conique est une hyperbole équilatère; les points O , O' sont les extrémités d'un diamètre variable et par suite l'enveloppe de OO' est le centre.

Si le point O de l'hyperbole équilatère est l'orthocentre du triangle inscrit ABC , le point diamétralement opposé est sur le cercle (ABC) ; théorème connu qui découle d'ailleurs de l'égalité des angles BAC , $BO'C$.

Autres solutions de MM. LETIERCE, PARROD et ABRAMESCU.

2009.

(1905, p. 96.)

On donne un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans une conique, et un point arbitraire O . Sur la tangente en A à la conique, on prend le point E où cette droite est rencontrée par le côté CB ; on mène la droite OE qui coupe AB en M . Au moyen du côté CD on obtient de même le point N sur AD . Quelle est l'enveloppe de la droite MN , lorsque C décrit la conique? (Canon.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

Les points E et F sont homographiques, par suite M et N ; quand le point C est en A , M et N sont confondus en A ; donc MN passe par un point fixe.

Remarques. — La droite passe par un point fixe quelle que soit la droite donnée passant par A et que ce point soit situé ou non sur la conique, l'enveloppe est une conique tangente aux droites AD et AB .

Autres solutions par MM. ABRAMESCU, V. MAËS, RETALI.
