

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1905)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 328-331

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__328_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1905).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle C de centre O et de rayon R , un point fixe K à l'intérieur de ce cercle. Un rayon lumineux FK , émanant d'un point F de la circonférence du cercle C , se réfléchit en K sur le diamètre OK et va rencontrer la circonférence de C en un point E . Soit M le milieu de la corde EF et soit AB la corde de C perpendiculaire au diamètre OK au point K .

1° Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle MAB quand F décrit la circonférence du cercle C .

2° Étudier, dans les mêmes conditions, comment varie le cercle passant par les centres des trois cercles exinscrits au triangle MAB .

3° On prend un second point K' fixe, intérieur à C et situé sur le diamètre OK . Un rayon lumineux $F'K'$, parallèle à FK , se réfléchit en K' sur ce diamètre et rencontre en E' la circonférence du cercle C . Trouver le lieu du point de rencontre de EF et de $E'F'$ lorsque F et F' se déplacent sur la circonférence du cercle C . Étudier ce lieu en supposant que K et K' se déplacent sur un diamètre fixe et de telle sorte que le milieu de KK' reste fixe.

4° Soit M' le milieu de $E'F'$. La droite MM' rencontre le lieu de M en un nouveau point H et celui de M' en un nouveau point H' . Étudier le cercle circonscrit au triangle HOH' et la perpendiculaire au milieu de HH' .

5° Soit L le point qui partage HH' dans un rapport donné λ . Démontrer que le lieu du point L est en général une ellipse. Examiner comment varient les cercles principaux de cette ellipse quand le rapport λ varie.

Mathématiques spéciales.

1° On donne les deux droites D, D' définies respectivement par les équations

$$(D) \quad y = 0, \quad z = h,$$

$$(D') \quad x = 0, \quad z = -h,$$

les axes de coordonnées ox , oy , oz étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface S lieu du sommet d'un parabolôide variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface S.

2° Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S en fonction de l'abscisse α et de l'ordonnée β des deux points N, N' où une droite, menée par M, rencontre respectivement D et D'. Soit P le point de coordonnées α , β dans le plan xoy . Lieu du point M quand P décrit une droite quelconque du plan xoy . Étude de l'intersection de la surface S avec une quadrique quelconque qui passe par D et D'. Lieu correspondant du point P. Cas où cette intersection se décompose.

3° Démontrer que la surface S est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques Q, dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les parabolôides Q_1 . Trouver l'enveloppe des quadriques Q.

*Composition sur l'Analyse et ses applications
géométriques.*

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires ox , oy , oz , étant décrite sous la forme

$$ux + vy + wz = h,$$

les équations

$$u = \cos \varphi, \quad v = \sin \varphi, \quad w = \cot \theta, \quad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ et φ désignent deux paramètres arbitraires et $f(\theta, \varphi)$ une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface S en coordonnées tangentielles.

1° Démontrer que, si l'on considère sur la surface S les deux systèmes de courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que $f(\theta, \varphi)$ soit de la forme

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α étant une fonction de θ seul et β fonction de φ seul.

Dans toute la suite de l'énoncé, on supposera que $f(\theta, \varphi)$ est de cette forme.

2° Montrer que les courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ sont alors les lignes de courbure de la surface S et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de θ et de φ , les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface S.

3° De ces deux rayons, l'un R_1 est fonction de θ seulement; l'autre R_2 dépend en général à la fois de θ et de φ . Quelle forme doit avoir $f(\theta, \varphi)$ pour que R_2 soit aussi indépendant de φ ? Montrer que, dans ce cas, la surface S est de révolution autour d'un axe parallèle à oz .

4° Etablir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction $f(\theta, \varphi)$ de manière à avoir

$$R_1 = l \operatorname{tang} \theta, \quad R_2 = -l \operatorname{cot} \theta,$$

R_1 et R_2 étant, suivant l'usage, affectés d'un signe et l désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.

5° Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre θ et φ qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface S et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ses points.

Mécanique rationnelle.

Soient $ox_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle fixe et $oxyz$ un trièdre trirectangle mobile de même sommet et de même orientation. Un corps solide S, attaché à ce second trièdre, est ainsi mobile autour du point fixe o .

Former les équations de son mouvement, sachant :

1° Que son ellipsoïde d'inertie relatif au point o est de révolution autour de oz .

2° Que le solide S, supposé non pesant, est sollicité par une force F appliquée en un point G de oz tel que $oG = a$, dirigée suivant PG, P désignant un point de oz_1 tel que $oP = b$, et égale à une fonction donnée $f(GP)$ de la distance des deux points G et P.

3° Qu'au début du mouvement, l'angle zoz_1 est droit et que la rotation instantanée du solide S se trouve dans le plan zoz_1 , avec des projections sur oz et sur oz_1 égales respectivement à ω et à ω_1 .

Application. — Le solide S est une sphère homogène, de centre G, de rayon a et de masse M. On a de plus

$$b = a, \quad \omega_1 = -\frac{7}{2}\omega, \quad f(GP) = \frac{28}{5}M a^4 \omega^2 \frac{1}{GP^3}.$$

Exprimer les angles d'Euler en fonctions explicites du temps.

Déterminer et étudier successivement les trajectoires de l'extrémité de la rotation instantanée par rapport aux deux trièdres trirectangles oXY_1z_1 et $oXYz$, supposés orientés comme le trièdre $ox_1y_1z_1$, oX étant perpendiculaire au plan zoz_1 .
