NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI PICCIOLI

# Sur l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à certaines surfaces de révolution et du second degré

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 5 (1905), p. 307-310

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__307_0>

[M⁴m]

# SUR L'ÉQUATION INTRINSÈQUE DES LIGNES QUI APPARTIENNENT A CERTAINES SURFACES DE RÉVOLUTION ET DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Empoli.

La méthode que j'ai exposée dans un article récent ([1]) et qui m'a servi pour trouver l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent au cylindre de révolution peut s'étendre à d'autres cas que je crois bien de faire connaître dans cette Note.

Je commence par écrire les deux groupes de formules

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dA}{ds} &= \frac{B}{\rho} - 1,\\ \frac{dB}{ds} &= -\frac{A}{\rho} - \frac{C}{T},\\ \frac{dC}{ds} &= \frac{B}{T},\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dm_1}{ds} &= \frac{m_2}{\rho} + \sin^2\theta,\\ \frac{dm_2}{ds} &= -\frac{m_1}{\rho} - \frac{m_3}{T} + \cos\theta_1\cos\theta_2,\\ \frac{dm_3}{ds} &= \frac{m_2}{T} - \cos\theta_1\cos\theta_3\end{aligned}\right.$$

dans le premier desquels A, B, C représentent les distances des plans principaux d'une courbe à double courbure $\mathcal{L}$ à un point fixe R, et dans le deuxième :

$$m_i = M_h\cos\theta_k - M_k\cos\theta_h,$$

---

([1]) *Sur l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de révolution* (*Nouv. Ann.*, 1904).

où $i$, $h$, $k$ est une combinaison des nombres 1, 2, 3 et $M_h$ représente le moment de la direction principale $h^{\text{ième}}$ par rapport à une droite fixe $r$ avec laquelle elle forme l'angle $\theta_h$.

Je rappelle enfin que les expressions

$$A^2 + B^2 + C^2 \quad \text{et} \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

mesurent le carré de la distance d'un point de la courbe $\mathfrak{L}$ au point R et à la droite $r$ respectivement.

Cela posé, soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe $\mathfrak{C}$ rapportée à deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et soit P un des points où elle est rencontrée par la ligne $\mathfrak{L}$ appartenant à la surface de révolution engendrée par $\mathfrak{C}$ lorsqu'on fait tourner son plan autour d'une de ses droites, par exemple autour de l'axe $Ox$. Posant $l^2 = x^2 + y^2$ [1], l'équation de $\mathfrak{C}$ pourra s'écrire sous la forme

$$\lambda(y, l^2) = 0.$$

Nous admettrons que de cette équation on puisse tirer

$$y = \varphi(l^2); \tag{1}$$

alors, comme $y$, représentant la distance de P à l'axe de rotation, est mesuré par $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ et $l$ par $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, nous pourrons substituer à l'équation (1) l'autre qui lui équivaut

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \varphi(A^2 + B^2 + C^2).$$

Voilà la relation qui lie les distances d'un point de $\mathfrak{L}$ à R

---

[1] Dans ce qui va suivre nous avons supposé que R appartient à $r$.

et $r$; d'ici, en élevant au carré et différentiant ensuite par rapport à l'arc $s$ de $\mathfrak{L}$, tenant compte des formules (I) et (II), on trouvera

$$(2) \qquad m_1 = - \mathrm{A}\frac{d\varphi^2(l^2)}{dl^2}.$$

Les cas auxquels nous nous bornerons dans cette Note s'obtiennent en supposant

$$\frac{d\varphi^2(l^2)}{dl^2} = a \qquad (a \text{ const. réelle}).$$

Il en résulte

$$(3) \qquad \varphi^2(l^2) = al^2 + b \qquad (b \text{ const.}).$$

D'ailleurs, comme

$$m_1 = - a\mathrm{A},$$

les deux premières des formules (II) nous donneront

$$m_2 = - a\mathrm{B} + (1 - a)\rho + \rho\cos^2\theta,$$
$$m_3 = - a\mathrm{C} + \mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}(1 - a - \cos^2\theta_1) - 3\mathrm{T}\cos\theta_1\cos\theta_2$$

et la troisième nous conduira à une relation du type

$$\mathrm{A}_{11}\cos^2\theta_1 + \mathrm{A}_{22}\cos^2\theta_2 + \mathrm{A}_{33}\cos^2\theta_3 + \mathrm{A}_{12}\cos\theta_1\cos\theta_2$$
$$+ \mathrm{A}_{23}\cos\theta_2\cos\theta_3 + \mathrm{A}_{13}\cos\theta_1\cos\theta_3 + \mathrm{A} = 0,$$

où les A sont des fonctions connues de $\rho$, T et $a$.

De là, suivant la méthode indiquée dans la Note précitée, nous parviendrons à l'équation intrinsèque $\mathrm{W} = 0$.

Les équations (1) et (3) nous donneront

$$(4) \qquad ax^2 + (a - 1)y^2 + b = 0$$

pour équation de la section méridienne. Cette courbe étant une conique, on en déduit que, pour $a > 1$, l'équation $\mathrm{W} = 0$ sera l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à l'*ellipsoïde allongé :* $b$ doit être négatif pour la réalité de la surface. Pour $0 < a < 1$, $W = 0$ sera l'équation intrinsèque d'un *hyperboloïde à une nappe* ($b > 0$) ou *à deux nappes* ($b < 0$) ou bien d'une *surface conique de révolution* ($b = 0$). Enfin, on obtiendra l'équation intrinsèque de l'*ellipsoïde aplati* pour $a < 0$ et $b > 0$ [1].

Lorsque $a$ est fonction de $l^2$, dans $W = 0$ figurent les quantités A, B, C; l'équation cherchée résulterait, en éliminant A, B, C, entre cette équation-ci et le système (I).