NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MATHY

Méthode particulière d'intégration de $\int_\gamma^\beta \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}dx$ quand $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réelles et que $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. Application à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 299-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__299_1>

[F8a]

MÉTHODE PARTICULIÈRE D'INTÉGRATION DE

$$\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx$$

QUAND α, β, γ, δ SONT RÉELLES ET QUE $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. E. MATHY.

LEMME. — *Développement des fractions* $\dfrac{A}{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)^n}$ *en fonctions entières de* ζ, p, $\mathrm{p}^{(n)}$.

Dans la théorie des fonctions elliptiques on démontre que les fractions de la forme $\frac{A}{(pu - pv)^n}$ peuvent s'exprimer en fonctions entières de ζ, p et $p^{(n)}$. Les développements ne sont pas formés; comme ils seront utilisés dans la question à résoudre, je me propose de les rechercher jusqu'à l'exposant 3.

Afin d'abréger les annotations, je pose

$$(1) \qquad \varphi(u, v) = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v).$$

La formule d'addition donne alors

$$(2) \qquad \frac{1}{pu - pv} = -\frac{1}{p'v}\varphi(u, v).$$

En dérivant (2) par rapport à v, on a

$$\frac{p'v}{(pu-pv)^2} = \frac{p''v}{p'^2v}\varphi(u, v) - \frac{1}{p'v}\varphi'_v(u, v).$$

On en conclut

$$(3) \qquad \frac{1}{(pu-pv)^2} = \frac{p''v}{p'^3v}\varphi(u, v) - \frac{1}{p'^2v}\varphi'_v(u, v).$$

On procède de même pour l'exposant 3 et l'on obtient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(pu-pv)^3} = {} & \left(\frac{p'''v}{2p'^4v} - \frac{3}{2}\frac{p''^2v}{p'^5v}\right)\varphi(u, v) \\ & + \frac{3}{2}\frac{p''v}{p'^4v}\varphi'_v(u, v) - \frac{1}{2p'^3v}\varphi''_v(u, v). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de $\varphi'_v(u, v)$ et $\varphi''_v(u, v)$ se déduisent de (1)

$$(5) \qquad \varphi'_v = -p(u+v) - p(u-v) + 2pv,$$

$$(6) \qquad \varphi''_v = -p'(u+v) + p'(u-v) + 2p'v.$$

Cas particuliers. — Si $pv = e_\alpha$,

$$p'v = 0$$

et les formules sont en défaut; mais alors, on se sert de

$$\frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha} = p(u + \omega_\alpha) - e_\alpha.$$

Il suffit de les élever au carré, puis au cube, et de remplacer

$$p^2 = \frac{1}{6}p'' + \frac{1}{12}g_2,$$

$$p^3 = \frac{1}{120}p^{(\text{IV})} + \frac{3}{20}g_2 p - \frac{1}{10}g_3$$

pour avoir les expressions intégrables.

Méthode d'intégration. — *Soit à calculer*

$$\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx$$

avec

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta.$$

En posant $\alpha - x = \frac{1}{y}$, on en déduit

$$(7)\qquad \begin{cases} \beta - x = \dfrac{1}{y} - (\alpha - \beta), \qquad dx = \dfrac{dy}{y^2}, \\ \gamma - x = \dfrac{1}{y} - (\alpha - \gamma), \\ \delta - x = \dfrac{1}{y} - (\alpha - \delta). \end{cases}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)(\delta - x)}\,dx \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{y} - (\alpha-\beta)\right)\left(\frac{1}{y} - (\alpha-\gamma)\right)\left(\frac{1}{y} - (\alpha-\delta)\right)\frac{1}{y}}\,\frac{dy}{y^2} \\ &= i\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\sqrt{\left(y - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(y - \frac{1}{\alpha-\gamma}\right)\left(y - \frac{1}{\alpha-\delta}\right)}\,\frac{dy}{y^4}. \end{aligned}$$

Le polynome sous le radical est du troisième degré;

pour faire disparaître le terme du second dégré, on fait

$$(8) \quad y = z + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha-\gamma} + \frac{1}{\alpha-\delta}\right) = z + \frac{1}{3}A.$$

En outre, si

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\alpha-\beta} - \frac{1}{3}A, \\ e_2 &= \frac{1}{\alpha-\gamma} - \frac{1}{3}A, \\ e_3 &= \frac{1}{\alpha-\delta} - \frac{1}{3}A, \end{aligned} \right.$$

l'expression se change en

$$i\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{3}A\right)^4}.$$

Enfin, soient

$$(10) \qquad z = \wp u \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3}A = \wp v;$$

de ce que

$$\wp' u = -2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)},$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} \\ &\quad = -\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\frac{\wp'^2 u\, du}{(\wp u - \wp v)^4}. \end{aligned}$$

Conséquemment

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\, dx \\ &\quad = -\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\int \frac{\wp'^2 u\, du}{(\wp u - \wp v)^4}. \end{aligned} \right.$$

D'abord, on peut remarquer que de

$$\frac{d}{du}\frac{\wp' u}{(\wp u - \wp v)^3} = \frac{\wp'' u}{(\wp u - \wp v)^3} - 3\frac{\wp'^2 u}{(\wp u - \wp v)^4},$$

on en déduit

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{p'^2 u\, du}{(pu-pv)^4} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{p'u}{(pu-pv)^3}\right)_{\lim} + \frac{1}{3}\int \frac{p'' u\, du}{(pu-pv)^3}. \end{aligned}\right.$$

En outre, de ce que

$$\begin{aligned} p'' u &= 6 p^2 u - \frac{1}{2} g_2 \\ &= 6(pu-pv)^2 + 12 pv(pu-pv) + 6p^2 v - \frac{1}{2} g_2, \end{aligned}$$

il résulte que

$$\frac{1}{3}\frac{p'' u}{(pu-pv)^3} = \frac{2}{pu-pv} + \frac{4pv}{(pu-pv)^2} + \frac{1}{3}\frac{p'' v}{(pu-pv)^3}.$$

On peut donc intégrer $\frac{1}{3}\int \frac{p'' u\, du}{(pu-pv)^3}$ par les formules (2), (3) et (4)

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{3}\int \frac{p'' u\, du}{(pu-pv)^3} \\ &= -\frac{2}{p'v}\int \varphi(u,v)\, du \\ &\quad + \frac{4pv\, p''v}{p'^3 v}\int \varphi(u,v)\, du - \frac{4pv}{p'^2 v}\int \varphi'_v(u,v)\, du \\ &\quad + \left(\frac{p''v\, p'''v}{6p'^4 v} - \frac{1}{2}\frac{p''^3 v}{p'^5 v}\right)\int \varphi(u,v)\, du \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{p''^2 v}{p'^4 v}\int \varphi'_v(u,v)\, du - \frac{1}{6}\frac{p''v}{p'^3 v}\int \varphi''_v(u,v)\, du. \end{aligned}\right.$$

Or, de (1), (5) et (6), on tire

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \int \varphi(u,v)\, du &= \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\,\zeta v, \\ \int \varphi'_v(u,v)\, du &= \zeta(u+v) + \zeta(u-v) + 2u\, pv \\ &= \zeta u + \frac{p'u}{pu-pv} + 2u\, pv, \\ \int \varphi''_v(u,v)\, du &= -p(u+v) + p(u-v) + 2u\, p'v \\ &= \frac{p'u\, p'v}{(pu-pv)^2} + 2u\, p'v. \end{aligned}\right.$$

En se servant de (13) et (14), on a, en groupant les termes,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int \frac{p'^2 u\, du}{(pu - pv)^4} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{p'u}{(pu-pv)^3} - \frac{1}{6}\frac{p''v}{p'^3 v}\left(\frac{p'u\, p'v}{(pu-pv)^2} + 2u\, p'v\right) \\
&\quad - \left(\frac{4pv}{p'^2 v} - \frac{1}{2}\frac{p''^2 v}{p'^4 v}\right)\left(\frac{p'u}{pu-pv} + 2\zeta u + 2u\, pv\right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{p'v} - \frac{4pv\, p''v}{p'^3 v} - \frac{1}{6}\frac{p''v\, p'''v}{p'^4 v} + \frac{p''^3 v}{2p'^5 v}\right)\left(\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta v\right).
\end{aligned}\right.$$

La question sera complètement résolue si l'on exprime pv, $p'v$, $p''v$ et $p'''v$ en fonction de α, β, γ, δ.

Or

$$(16)\qquad pv = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha-\gamma} + \frac{1}{\alpha-\delta}\right),$$

on obtient ainsi

$$(17)\qquad p'v = \frac{-2i}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}},$$

$$(18)\qquad p''v = 6p^2 v - \frac{1}{2}g_2 = 2\,\frac{3\alpha - (\beta+\gamma+\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$

En outre, on sait que

$$(19)\qquad p'''v = 12\, p\, p'.$$

Les limites d'intégration sont fournies par

$$\alpha - x = \frac{1}{pu - pv};$$

aux valeurs extrêmes de x correspondent celles de u.

D'un autre côté, de (16) et (17) on conclut que v est purement imaginaire et compris entre o et ω'.

Valeur de l'intégrale quand les limites de l'intégration sont $x = \gamma$ et $x = \beta$. — Dans ce cas : $x = \gamma$

donne

$$\alpha - \gamma = \frac{1}{pu - pv}, \qquad pu = e_2, \qquad u = \omega'',$$

$x = \beta$ donne

$$\alpha - \beta = \frac{1}{pu - pv}, \qquad pu = e_1, \qquad u = \omega$$

Mais alors

$$(p'u)_{\omega}^{\omega} = 0, \quad (\zeta u)_{\omega'}^{\omega} = -\eta', \quad \left(\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)_{\omega'}^{\omega} = -2\eta' v.$$

Avec ces conditions, la formule (15) devient

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\omega''}^{\omega} \frac{p^2 u\, du}{(pu - pv)^4} \\ &= \frac{1}{3}\frac{p''v}{p'^2 v}\,\omega' + \left(\frac{8pv}{p'^2 v} - \frac{p''^2 v}{p'^4 v}\right)(\eta' + \omega' pv) \\ &\quad - \left(\frac{4}{p'v} - \frac{8pv\,p''v}{p'^3 v} - \frac{1}{3}\frac{p''v\,pv}{p'^4 v} + \frac{p''^3 v}{p'^5 v}\right)(\eta' v - \omega'\zeta v). \end{aligned}\right.$$

Les notations ω' et η' peuvent être remplacées par K' et E' qui ont été calculées par Legendre; les formules sont

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\omega}{i} = \frac{K'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad i\eta' = E'\sqrt{e_1 - e_3} + \frac{e_3 K'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \\ &k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \sin^2\left(\frac{u}{2} - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Il est donc possible d'obtenir la valeur précise de

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\displaystyle\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx}{\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}} \\ &= +\frac{1}{3}\frac{p''v}{p'^2 v}\frac{\omega}{i} \\ &\quad - \left(\frac{8pv}{p'^2 v} - \frac{p''^2 v}{p'^4 v}\right)\left(i\eta' - \frac{\omega'}{i} pv\right) \\ &\quad - \left(\frac{4}{p'v} - \frac{8pv\,p''v}{p'^3 v} - \frac{1}{3}\frac{p''v\,pv}{p'^4 v} + \frac{p''^3 v}{p'^5 v}\right)\left(i\eta' v + \frac{\omega'}{i}\zeta v\right). \end{aligned}\right.$$

Application géométrique. — *Volume commun à deux cylindres droits à bases circulaires dont l'un pénètre l'autre, quand les deux axes sont perpendiculaires entre eux.*

Soit a la plus courte distance des deux axes des cylindres. On choisit comme axe des Z l'axe du cylindre pénétré, et comme axe des X la plus courte distance; cette plus courte distance rencontre l'axe des Z en O; par O on mène une perpendiculaire au plan ZOX; c'est l'axe des Y qui devient parallèle à l'axe du second cylindre.

Cela posé, il est facile de voir que les équations des deux cylindres sont

$$y^2 + x^2 = R^2, \tag{23}$$

$$z^2 + (x - a)^2 = r^2. \tag{24}$$

Une tranche commune aux deux cylindres, parallèle à ZOY et d'épaisseur dx, a pour volume

$$yz\,dz;$$

le volume total commun sera

$$V = 4\int zy\,dx,$$

ou

$$V = 4\int \sqrt{(R^2 - x^2)[r^2 - (a - x)^2]}\,dx. \tag{25}$$

Les quatre racines du polynome sont réelles : dans le cas de pénétration

$$\delta = -R, \qquad \gamma = (a - r), \qquad \beta = a + r, \qquad \alpha = R;$$

dans le cas d'arrachement

$$\delta = -R, \qquad \gamma = (a - r), \qquad \beta = R, \qquad \alpha = a + r.$$

On reconnaît que les limites d'intégration sont γ et β et qu'il faut appliquer la formule (22).