NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C.-A. LAISANT

Intégration des fonctions inverses

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 253-257

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__253_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[C2a]

INTÉGRATION DES FONCTIONS INVERSES;

Par M. C.-A. LAISANT.

On sait que si l'équation $y=f(x)$, résolue par rapport à x, donne

$$x=\varphi(y),$$

les deux fonctions f et φ sont appelées deux fonctions *inverses*. Presque tous les traités d'Algèbre ou d'Analyse donnent la dérivée d'une fonction inverse d'une autre.

Par contre, je n'ai trouvé nulle part l'exposé d'une règle permettant d'obtenir l'intégrale

$$\int \varphi(x)\,dx=\Phi(x)$$

dès l'instant où l'on sait déterminer

$$\int f(x)\,dx=\mathrm{F}(x).$$

La question est d'une telle simplicité, cependant, que j'ai peine à croire nouvelle la règle que je me propose d'indiquer ici. Mais, déjà connue ou non, elle n'est pas répandue dans l'enseignement, où elle serait de nature à rendre les plus sérieux services. C'est donc surtout aux professeurs que je m'adresse, et je crois mon appel particulièrement opportun, à l'heure où les éléments du Calcul infinitésimal viennent d'être enfin introduits dans le programme de la classe de Mathématiques spéciales en France.

Avec les notations qui précèdent, la règle dont il s'agit se résume en l'identité suivante

$$\Phi(x) = x\,\varphi(x) - F[\varphi(x)], \tag{1}$$

qui peut aussi s'écrire symboliquement

$$\Phi = (x - F)\varphi.$$

On la vérifie immédiatement en prenant les dérivées des deux membres, et en se rappelant que

$$f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)] = x;$$

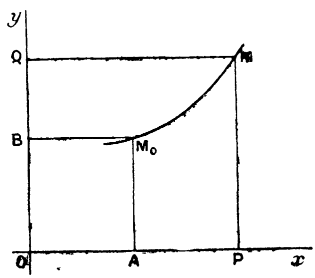
car on obtient ainsi

$$\Phi'(x) = \varphi(x) + x\,\varphi'(x) - F'[\varphi(x)]\,\varphi'(x);$$

mais $\Phi' = \varphi$, $F' = f$; en sorte qu'on a

$$\varphi(x) = \varphi(x) + x\,\varphi'(x) - x\,\varphi'(x).$$

Je suis arrivé à cette règle, traduite par l'identité (1),



par la considération géométrique de l'aire qui correspond à une intégrale définie. Si une courbe (M) a pour équation $y = f(x)$, son équation est aussi $x = \varphi(y)$. Alors les coordonnées de deux points M_0 et M étant respectivement (a, b) et (x, y) on a

$$\mathrm{M_0APM} = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad \mathrm{M_0MQB} = \int_b^y \varphi(y)\,dy,$$

$$\mathrm{M_0APM} + \mathrm{M_0MQB} = \mathrm{OPMQ} - \mathrm{OAM_0B} = xy - ab,$$

ou, avec les notations précédentes,

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) + \Phi(y) - \Phi(b) = xy - ab.$$

Comme $x = \varphi(y)$, $a = \varphi(b)$, on peut encore écrire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Phi(y) - y\,\varphi(y) + \mathrm{F}[\varphi(y)] \\ &\quad = \Phi(b) - b\,\varphi(b) + \mathrm{F}[\varphi(b)], \end{aligned} \right.$$

relation qui devient identique avec (1) si l'on remplace y par x et si l'on considère des intégrales indéfinies au lieu d'intégrales définies.

Naturellement, on a aussi l'identité réciproque

$$(3) \qquad \mathrm{F}(x) = x f(x) - \Phi[f(x)]$$

ou, symboliquement,

$$\mathrm{F} = (x - \Phi) f.$$

On obtient d'ailleurs cette identité (3) en remplaçant dans (1) x par $f(x)$.

Au fond, tout ceci dérive de la formule qui donne la différentielle du produit xy,

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx,$$

ou, ce qui revient au même, de l'intégration par parties de $f(x)\,dx$, en séparant simplement dx comme différentielle exacte, car on a ainsi

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x\,df(x) = x f(x) - \int \varphi(y)\,dy$$

si l'on a posé $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$. Et l'on tire de là

$$F(x) = xf(x) - \Phi(x) = xf(x) - \Phi[f(x)],$$

c'est-à-dire l'identité (3).

Le grand avantage de la règle indiquée consiste, chaque fois que la fonction inverse φ est explicitement connue, dans la possibilité d'écrire immédiatement l'intégrale Φ, sans aucun calcul préalable, si l'on connaît celle, F, qui correspond à la fonction directe f. Nous allons en donner quelques exemples :

1° On sait que l'intégrale de $e^x\,dx$ est e^x. De là on déduira immédiatement celle de $\mathrm{L}x\,dx$. Ici

$$f(x) = e^x, \qquad \varphi(x) = \mathrm{L}x, \qquad F(x) = e^x.$$

Donc, en appliquant l'identité (1)

$$\Phi(x) = \int \mathrm{L}x\,dx = x\,\mathrm{L}x - e^{\mathrm{L}x} = x\,\mathrm{L}x - x = x(\mathrm{L}x - 1).$$

2° Soit

$$f(x) = \sin x, \qquad \varphi(x) = \arcsin x, \qquad F(x) = -\cos x.$$

On aura

$$\Phi(x) = \int \arcsin x\,dx$$
$$= x \arcsin x + \cos(\arcsin x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

3° Soit

$$f(x) = \operatorname{tang} x, \qquad \varphi(x) = \operatorname{arc\,tang} x, \qquad F(x) = -\mathrm{L}\cos x.$$

Alors

$$\Phi(x) = \int \operatorname{arc\,tang} x\,dx = x \operatorname{arc\,tang} x + \mathrm{L}\cos(\operatorname{arc\,tang} x)$$
$$= x \operatorname{arc\,tang} x + \mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1 + x^2).$$

4° Si $y = f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$, et si l'équation $f(x) - y = 0$ est algébriquement résoluble, soit $\alpha = \varphi(y)$ l'expression qui donne l'une des racines. On aura

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx$$

$$= x\,\varphi(x) - \left(\frac{a_0}{m+1}[\varphi(x)]^{m+1} + \frac{a_1}{m}[\varphi(x)]^m + \ldots + a_m\,\varphi(x)\right).$$

L'introduction de cette règle d'intégration dans l'enseignement me paraît, j'y insiste, profondément désirable.