Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Discussion d'un triangle donné par les points remarquables O, I, H

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 241-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__241_0>

[K2a et b]

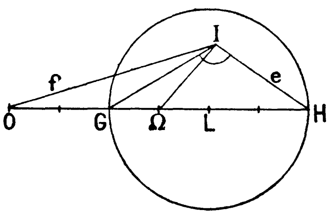
DISCUSSION D'UN TRIANGLE DONNÉ PAR LES POINTS REMARQUABLES O, I, H;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Un triangle ABC est déterminé quand on connaît le centre O du cercle circonscrit (*fig.* 1), le point de

Fig. 1.



concours des hauteurs H, le centre I d'un cercle tangent aux trois côtés, *cercle inscrit ou cercle ex-inscrit.* Au moyen des formules

$$(1)\qquad \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr = 2R\left(\frac{R}{2} - r\right) \qquad \text{(EULER)},$$

$$(2)\qquad \Omega I = \frac{R}{2} - r \qquad \text{(FEUERBACH)},$$

dans lesquelles r est négatif s'il s'agit d'un cercle ex-inscrit, on a d'abord

$$2R = \frac{\overline{OI}^2}{\Omega I};$$

on peut donc tracer le cercle circonscrit, le cercle des neuf points, et par suite le cercle I. Le triangle ABC doit en outre être circonscrit à une conique de foyers O et H, admettant pour cercle directeur le cercle circonscrit. Si cette conique et le cercle I ont quatre tangentes communes, trois de ces tangentes portent les côtés du triangle; la quatrième n'est pas à considérer. Le problème ne peut avoir qu'une solution; il est du troisième degré.

2. En supposant que le triangle existe, on a ceci :

Le point I *est le centre du cercle inscrit au triangle* ABC, *ou le centre d'un cercle ex-inscrit, selon que ce point est intérieur ou extérieur au cercle décrit sur* GH *comme diamètre, ou encore selon que l'angle* GIH *est obtus ou aigu.*

On a en effet

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{\Omega I}^2} = \frac{2R}{\frac{R}{2} - r},$$

et r sera positif si l'on a $\frac{OI}{\Omega I} > 2$; or, le lieu des points pour lesquels ce rapport est égal à 2 est le cercle décrit sur GH comme diamètre; donc....

On peut d'ailleurs appliquer le théorème de Stewart aux trois obliques IO, IΩ, IL, le point L étant le milieu de GH, ce qui donne

$$\overline{IO}^2 + 3\overline{IL}^2 - 4\overline{I\Omega}^2 = 12\,\overline{\Omega L}^2 = 3\overline{GL}^2$$

ou

$$R(R - 2r) - (R - 2r)^2 = 3\left(\overline{LG}^2 - \overline{LI}^2\right)$$

ou

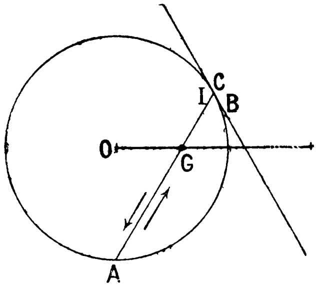
$$2r(R - 2r) = 3\left(\overline{LG}^2 - \overline{LI}^2\right);$$

r sera positif si l'on a

$$LI < LG.$$

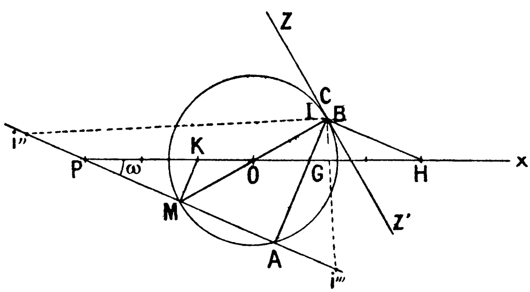
Lorsque l'angle GIH est droit, on a $r = 0$; ce cas singulier forme transition entre celui de la figure 5 et celui de la figure 6 : l'angle A est alors nul, ainsi que le côté BC (*fig.* 2). La vérification directe est facile.

Fig. 2.



3. Les points O et H étant donnés, le point I variant, chacun des triangles ABC que l'on obtient est obtenu quatre fois, le point donné I pouvant être le centre i du cercle inscrit, ou le centre d'un cercle ex-inscrit, i', i'' ou i''' (*fig.* 3). Chacun de ces triangles correspond à

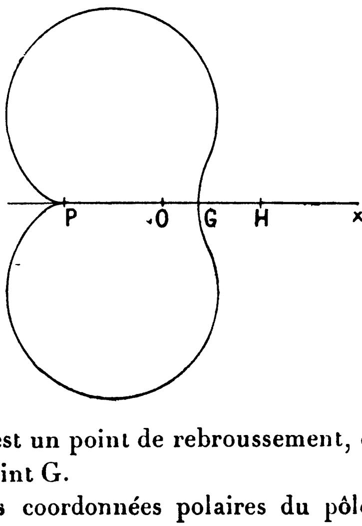
Fig. 3.



une position du point I à l'intérieur du cercle décrit sur GH comme diamètre, et l'on verra par le calcul que le point I peut être quelconque dans ce cercle.

Si le point I est donné sur la circonférence même de ce cercle l'angle A et le côté BC devenant nuls, les points i et i' sont confondus en I, tandis que les points i'' et i''' viennent occuper des positions limites; ces positions limites se trouvent sur la perpendiculaire menée du point A à la droite AI, *perpendiculaire qui passe constamment par le point* P *symétrique de* H *par rapport à* O, et sur les bissectrices des angles AIz, AIz'. Le cercle O, circonscrit au triangle ABC, passant au milieu de $i''i'''$, le milieu M du segment PA est aussi le milieu de $i''i'''$, et IM est la médiane du triangle rectangle I$i''i'''$, comme on peut d'ailleurs le voir directement. De là une construction simple de la courbe qui est le lieu des points limites i'' et i'''; *ayant décrit deux circonférences sur* PK *et sur* GH *comme diamètres, on mène les parallèles variables* PM *et* HI, *et l'on rabat* MI *en* Mi'' *et en* Mi'''; on obtient la courbe de la figure 4,

Fig. 4.



le point P est un point de rebroussement, et la courbe passe au point G.

Avec des coordonnées polaires du pôle P, comme on a

$$\overline{Pi''} + \overline{Pi'''} = 2\overline{PM}, \qquad \overline{Pi''} \times \overline{Pi'''} = -\overline{AI}^2,$$

l'équation de la courbe est, en posant $OH = k$,

$$\rho^2 - \frac{4k}{3}\rho\cos\omega - 4k^2\sin^2\omega = 0; \tag{3}$$

l'expression de ρ en fonction de ω traduit naturellement la construction ci-dessus

$$\rho = PM \pm MI.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes montre que la courbe est une quartique admettant pour points doubles les points cycliques.

Au paragraphe II, l'équation se présentera sous la forme

$$3\rho^4 - 4\rho^2 kx - 12k^2(\rho^2 - x^2) = 0,$$

qui peut donner les limites de x, et celles de ρ; je dirai seulement que les points de contact de la tangente double voisine de G sont les derniers sommets des deux triangles équilatéraux construits sur OH.

4. Les points O et H étant donnés, la courbe en question limite la région du plan à l'intérieur de laquelle le point I ne doit pas être donné pour que le triangle ABC existe.

Ce fait, que nous démontrerons rigoureusement, se comprend assez bien d'après ce qui précède; si l'on fait varier le point I, lorsque ce point franchit la circonférence décrite sur GH comme diamètre, les points i et i' s'échangent, on retrouve les mêmes triangles ABC, et les points i'', i''' reprennent les positions qu'ils occupaient; après s'être approchés de la courbe limite, ils s'en écartent.

II.

5. Euler a formé l'équation du troisième degré qui a pour racines les longueurs des côtés du triangle ABC, en prenant comme données les longueurs

$$\mathrm{IH} = e, \qquad \mathrm{IO} = f, \qquad \mathrm{OH} = k,$$

le point I étant le centre du cercle inscrit. Je me propose de *discuter* le problème en me plaçant dans le cas général où le point I est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle.

6. Conformément aux figures 5 et 6, le plan étant

Fig. 5.

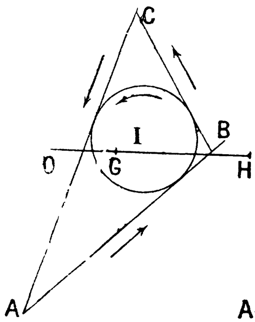
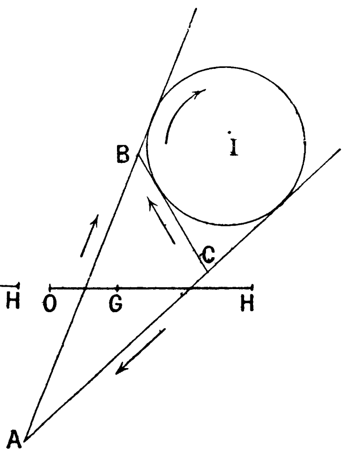


Fig. 6.



orienté par la flèche φ, nous désignerons par r le rayon du cercle I affecté du signe $+$ ou du signe $-$ selon qu'il s'agira d'un cercle inscrit ou d'un cercle ex-inscrit ; on aura donc les formules (1) et (2). Les axes qui portent les côtés du triangle étant dirigés comme tangentes au cercle I, nous poserons

$$a = \overline{BC}, \qquad b = \overline{CA}, \qquad c = \overline{AB},$$

de sorte que, dans le cas de la figure 6, a sera négatif.

Avec $2p = a + b + c$, on aura toujours

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$
$$S = pr, \qquad abc = 4RS,$$

S ayant un signe déterminé par le sens de circulation ABC.

Nous poserons encore

$$s = a + b + c,$$
$$t = bc + ca + ab,$$
$$u = abc,$$

de sorte que a, b, c seront racines de l'équation

$$x^3 - sx^2 + tx - u = 0.$$

7. On a, entre les trois inconnues principales s, t, u, et les deux inconnues auxiliaires R, r, les cinq équations suivantes :

$$(4) \qquad R^2 - 2Rr = f^2 \quad \text{ou} \quad 2R\left(\frac{R}{2} - r\right) = f^2,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = \frac{2e^2 + 2f^2 - k^2}{4},$$

$$(6) \qquad s^2 - 2t = 9R^2 - k^2,$$

$$(7) \qquad t - \frac{s^2}{4} = r^2 + 4Rr,$$

$$(8) \qquad u = 2Rr \times s.$$

Les équations (4) et (5) sont données par les formules (1) et (2). On a (8) en écrivant

$$abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr \times s.$$

L'équation (6) se tire de la formule barycentrique

$$\sum \overline{\mathrm{MA}}^2 = 3\overline{\mathrm{MG}}^2 + \frac{\Sigma a^2}{3},$$

en mettant M en O. On obtient (7) en écrivant

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\ &= \frac{p^3 - 2p^3 + p\Sigma ab - 4\mathrm{R}rp}{p} \\ &= -p^2 + \Sigma ab - 4\mathrm{R}r. \end{aligned}$$

8. Les équations (4) et (5) donnent

$$\mathrm{R}^2 = \frac{f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2}, \tag{9}$$

$$2\mathrm{R}r = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2}, \tag{10}$$

$$4r^2 = \frac{(k^2 - 2e^2 - f^2)^2}{2e^2 + 2f^2 - k^2}. \tag{11}$$

Les équations (6) et (7) donnent

$$\begin{aligned} s^2 &= 18\mathrm{R}^2 - 2k^2 + 4r^2 + 16\mathrm{R}r, \\ 2t &= 9\mathrm{R}^2 - k^2 + 4r^2 + 16\mathrm{R}r; \end{aligned}$$

on en déduit, en ordonnant par rapport à k,

$$s^2 = \frac{3k^4 - 8k^2e^2 + 2k^2f^2 + 4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2}, \tag{12}$$

$$t = \frac{k^4 - 3k^2e^2 + 2k^2f^2 + 2e^4 - 6e^2f^2 + f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2}. \tag{13}$$

On a d'ailleurs

$$u = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2}\,s. \tag{14}$$

[La formule (12) est reproduite dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 85, avec f^4 au lieu de $11f^4$;

à la page 84, ligne 13 et 15, on a mis également f^4 au lieu de $27 f^4$ et p^2 au lieu de ρ^2.]

9. On connaît donc s, t, u, et l'on peut calculer a, b, c. Pour la discussion, il faut observer que, si l'on trouve a, b, c réels, comme r^2 est positif d'après (11), on a

$$p(p-a)(p-b)(p-c) > 0,$$

de sorte que l'existence du triangle ABC est alors assurée. Les conditions requises sont donc :

1° Que s^2 soit positif ou nul;

2° Que l'équation du troisième degré ait ses racines réelles.

10. Supposons pour un instant la première condition remplie.

Pour écrire que l'équation

$$x^3 - sx^2 + tx - u = 0$$

a ses racines réelles, on écrit que le résultant des deux équations

$$3x^2 - 2sx + t = 0.$$
$$sx^2 - 2tx + 3u = 0$$

est négatif ou nul.

En posant

$$\Delta = 3t - s^2, \qquad \Delta' = 3su - t^2, \qquad \theta = 9u - st,$$

on a la condition

$$\theta^2 - 4\,\Delta\Delta' \leqq 0. \tag{15}$$

On trouve, après suppression du facteur

$$2e^2 + 2f^2 - k^2$$

aux deux termes de chacune des trois fractions obtenues,

$$\Delta = e^2 - 4f^2, \tag{16}$$

$$\Theta = s(k^2 - e^2 - 5f^2), \tag{17}$$

$$\Delta' = \frac{\left\{\begin{array}{l} k^6 - k^4(4e^2 + 3f^2) + k^2(5e^4 + 4e^2f^2 + 3f^4) \\ \quad - 2e^6 + 2e^4f^2 + 8e^2f^4 - 17f^6 \end{array}\right\}}{2e^2 + 2f^2 - k^2}. \tag{18}$$

11. Le premier membre de la condition (15) est donc du huitième degré par rapport aux quantités e, f, k : *des considérations géométriques vont nous permettre de lui donner une forme simple.* Lorsque le point I est sur la droite OH, le triangle ABC est isoscèle, I étant le centre du cercle inscrit, ou du cercle ex-inscrit dans l'angle compris entre les côtés égaux; on a, par exemple,

$$\overline{CA} = \overline{AB} \qquad \text{ou} \qquad b = c,$$

et l'équation du troisième degré a alors deux racines égales; le premier membre de la condition (15) contient donc en facteur l'expression

$$k^4 - 2k^2(e^2 - f^2) + e^4 - 2e^2f^2 + f^4,$$

qui représente $-16T^2$, T étant l'aire du triangle OIH.

Ce premier membre contient également le facteur

$$k^2 - 2e^2 - f^2;$$

en effet, quand cette expression est nulle (ce qui arrive si l'on a $LI = LG$) on a $r = 0$ d'après (10), et par suite $u = 0$; on a donc, par exemple, $a = 0$, $b = c$ (*fig.* 2), et l'équation du troisième degré a encore deux racines égales.

La condition (15) est alors de la forme

$$(k^4 + e^4 + f^4)(k^2 - 2e^2 - f^2)(\alpha k^2 + \beta e^2 + \gamma f^2) \leqq 0,$$

α, β, γ sont des nombres. On détermine ces nombres par les termes en k^8, e^8, f^8, et l'on a finalement

$$-16T^2 \times (k^2 - 2e^2 - f^2)^2 \leqq 0,$$

condition remplie d'elle-même. Ainsi, *pourvu que* s *soit réel, le triangle* ABC *existe.*

12. On a donc la seule condition

$$4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4 - 8k^2e^2 + 2k^2f^2 + 3k^4 \geqq 0.$$

Les points O et H sont supposés fixes, le point I étant variable, la région possible pour ce point est limitée par une certaine courbe. Avec des axes de coordonnées rectangulaires, dont l'origine est par exemple au milieu de OH (*fig.* 4), on trouve que la courbe a un point de rebroussement au point P qui est le symétrique de H par rapport à O.

Mettant alors l'origine des coordonnées au point P, et posant $PM = \rho$, on a pour l'équation de la courbe en coordonnées x et ρ :

$$\begin{aligned}
&4(\rho^2 - 4kx + 4k^2)^2 \\
&\quad - 12(\rho^2 - 4kx + 4k^2)(\rho^2 - 2kx + k^2) \\
&\quad + 11(\rho^2 - 2kx + k^2)^2 - 8k^2(\rho^2 - 4kx + 4k^2) \\
&\qquad\qquad + 2k^2(\rho^2 - 2kx + k^2) + 3k^4 = 0
\end{aligned}$$

ou

$$3\rho^4 - 4\rho^2kx - 12k^2(\rho^2 - x^2) = 0;$$

la courbe est bien celle que l'on a obtenue au paragraphe I.

Le point I doit être extérieur à cette courbe, puisque le premier membre de l'équation précédente doit être positif.

Lorsque le point I est sur la courbe limite, on a

$$s = 0,$$

par suite

$$u = 0,$$

c'est-à-dire, par exemple,

$$b = 0, \qquad a + c = 0;$$

l'angle B de la figure 6 devient nul.

III.

13. Le triangle obtenu ABC peut être isoscèle, le cercle I étant ex-inscrit dans l'un des angles à la base; on a alors, par exemple, $\overline{BA} = \overline{BC}$ (*fig.* 6), où $c + a = 0$.

La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(a + b + c)(bc + ca + ab) = abc \qquad \text{ou} \qquad st = u,$$

ce qui donne

$$t = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

et ensuite

$$k^4 - k^2(3e^2 - f^2) + 2(e^2 - f^2)^2 = 0.$$

On trouve que le point I doit être sur une hyperbole ayant ses sommets aux points O et G, et dont les asymptotes font avec OG des angles de 60°; cette hyperbole rencontre la courbe de la figure 4 en deux points dont les ordonnées ont leurs pieds en P, et la partie de l'hyperbole intérieure à la courbe limite est naturellement à rejeter.