Nouvelles annales de mathématiques

R. Bricard

Sur la transformation d'Ernest Duporcq et sur celle de Lie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 221-225

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__221_1>

[P6d, P6f]

SUR LA TRANSFORMATION D'ERNEST DUPORCQ ET SUR CELLE DE LIE;

Par M. R. BRICARD.

1. On doit à E. Duporcq [1] une transformation de contact remarquable qui généralise celle de Lie, en

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVII, 1899, p. 146.

faisant correspondre aux droites de l'espace non les sphères, mais les quadriques circonscrites à une quadrique fixe.

Cette transformation a été présentée par le regretté géomètre sous une forme entièrement synthétique qui en rend les applications un peu pénibles.

On peut, comme on va le voir, définir, par des formules très simples, une transformation qui jouit de propriétés identiques à celles de Duporcq.

2. Proposons-nous, à cet effet, de résoudre le problème suivant :

Exprimer, en fonctions rationnelles de trois paramètres, les coordonnées d'une droite quelconque tangente à une quadrique fixe.

Soient

$$\frac{X - x_0}{p} = \frac{Y - y_0}{q} = \frac{Z - z_0}{r}$$

les équations d'une droite D. Les coordonnées pluckériennes de cette droite sont p, q, r, et les trois quantités

$$p' = q z_0 - r y_0, \qquad q' = r x_0 - p z_0, \qquad r' = p y_0 - q x_0.$$

On a l'identité fondamentale

$$(1) \qquad pp' + qq' + rr' = 0.$$

Exprimons que la droite D est tangente à la quadrique (Q) représentée par l'équation

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0.$$

On forme aisément l'équation

$$(3) \qquad p^2 + q^2 - r^2 + p'^2 + q'^2 - r'^2 = 0.$$

Cela posé, on tire de (1) et (3), par des combinaisons simples,

$$(4)\qquad (p+p')^2+(q+q')^2-(r-r')^2=0,$$
$$(5)\qquad (p-p')^2+(q-q')^2-(r+r')^2=0.$$

Nous résoudrons, d'une manière aussi générale que possible, le système précédent, en posant (à un facteur de proportionnalité près)

$$p+p'=4xy,\quad q+q'=2(x^2-y^2),\quad r-r'=2(x^2+y^2),$$
$$p-p'=-4z,\quad q-q'=2(z^2-1),\quad r+r'=2(z^2+1),$$

x, y, z étant trois quantités quelconques. On tire de là

$$(6)\quad \begin{cases} p=2(xy-z), & q=x^2-y^2+z^2-1, & r=x^2+y^2+z^2-1,\\ p'=2(xy+z), & q'=x^2-y^2-z^2+1, & r'=-x^2-y^2+z^2+1.\end{cases}$$

Les formules (6) *résolvent la question proposée.*

3. *Si l'on considère x, y, z comme les coordonnées d'un point, on voit que les formules* (6) *font correspondre à tout point m de l'espace une droite* D *qui touche la quadrique* (Q).

On vérifie sans peine que les équations de la droite D peuvent s'écrire

$$(7)\qquad \begin{cases} (y^2+1)X+(xy-z)(Y-Z)+y^2-1=0,\\ (x^2+z^2)X-(xy-z)(Y+Z)-x^2+z^2=0.\end{cases}$$

La droite D *engendre une quadrique, quand le point m décrit une droite quelconque.*

Supposons en effet que le point m décrive la droite

$$y=ax+b,$$
$$z=cx+d.$$

Si l'on remplace dans les formules (6) y et z par les expressions précédentes, on trouvera pour p, q, r, p', q', r', des expressions de la forme

$$A_i x^2 + B_i x + C_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Or, entre *quatre* polynomes homogènes et du second degré en x et y, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. On peut donc former entre les coordonnées p, q, r, p', q', r', *trois* relations linéaires et homogènes, en général distinctes. Autrement dit, lorsque le point m décrit une droite, la droite correspondante D varie en appartenant à trois complexes linéaires : elle engendre donc une quadrique comme il est bien connu. Cette quadrique est d'ailleurs évidemment circonscrite à (Q).

On retrouve ainsi les propriétés caractéristiques de la transformation de Duporcq.

Je n'insiste pas sur les applications nombreuses que l'on peut faire de la transformation de Duporcq. Elles ont été exposées dans le cours professé par M. Humbert au Collège de France (semestre 1904-1905), sur les fonctions abéliennes et leurs applications géométriques, et dont tous les géomètres espèrent une publication prochaine.

4. Quand la quadrique (Q) dégénère en l'ombilicale, la transformation de Duporcq devient celle de Lie.

Pour retrouver les formules classiques qui définissent cette dernière, il est nécessaire d'user de quelques précautions.

A cet effet, considérons, au lieu de la quadrique (Q), la quadrique (Q') représentée *en coordonnées tangentielles* par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 - \lambda^2 = 0, \tag{8}$$

La condition pour que la droite D lui soit tangente est

$$p^2+q^2+r^2-\lambda^2(p'^2+q'^2+r'^2)=0, \tag{9}$$

d'où, par combinaison des équations (1) et (9),

$$\begin{aligned}(p+i\lambda p')^2+(q+i\lambda q')^2+(r+i\lambda r')^2&=0,\\ (p-i\lambda p')^2+(q-i\lambda q')^2+(r-i\lambda r')^2&=0.\end{aligned}$$

Je résoudrai le système précédent en posant

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned} p+i\lambda p'&=x^2-1, & p-i\lambda p'&=(x+\lambda z)^2-(1+\lambda y)^2,\\ q+i\lambda q'&=i(x^2+1), & q-i\lambda q'&=-i[(x+\lambda z)^2+(1+\lambda y)^2],\\ r+i\lambda r'&=-2x, & r-i\lambda r'&=-2(x+\lambda z)(1+\lambda y),\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire p, q, r, p', q', r'.

Les expressions obtenues conviennent quel que soit λ; si la quadrique (Q'), en particulier, se réduit à l'ombilicale, c'est-à-dire si l'on fait $\lambda=0$, elles ne deviennent pas illusoires, grâce à la forme choisie pour les seconds membres des relations (10).

On trouve en ce cas

$$\begin{aligned} p&=x^2-1, & p'&=i(xz-y),\\ q&=-i(x^2+1), & q'&=xz+y,\\ r&=-2x, & r'&=-i(xy+z),\end{aligned}$$

et la droite correspondante a pour équations

$$\begin{aligned} X+Yi+xZ+z&=0,\\ 2(X-Yi)-Z+y&=0.\end{aligned}$$

Ce sont les équations bien connues de la transformation de Lie.