NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur les éléments doubles de deux figures semblables dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 213-220

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__213_1>

[P1e]

SUR LES ÉLÉMENTS DOUBLES DE DEUX FIGURES SEMBLABLES DANS L'ESPACE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Soient OX, OY deux axes rectangulaires; considérons la droite isotrope $Y = Xi$, et faisons-la tourner de l'angle θ : elle ne cesse pas de coïncider avec elle-même, mais un point M de cette droite vient occuper une autre position M′ que nous déterminerons comme il suit. Soient OX′, OY′ deux axes rectangulaires obtenus en faisant tourner les premiers de l'angle θ;

---

(1) On a du reste

$$a_{ij} = \sum \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\ldots} y^{\alpha} y^{\beta} y^{\gamma} \ldots.$$

Les facteurs $y^{\alpha} y^{\beta} \ldots$ étant au nombre de j, et $\alpha + \beta + \ldots = i$; cette formule se déduit de la formule symbolique

$$\frac{d^n}{dx^n}(u, v, w, \ldots) = (u + v + w + \ldots)^n,$$

en posant $u = v = w = \ldots = y$.

les coordonnées du point M dans le système primitif étant X, Y, les coordonnées de ce point dans le système transformé sont

$$X' = X\cos\theta + Y\sin\theta = X(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$Y' = -X\sin\theta + Y\cos\theta = Y(\cos\theta + i\sin\theta);$$

comme X et Y sont aussi les coordonnées du point M′ dans le nouveau système, on arrive à ce résultat : *les coordonnées du point* M *sont égales à celles du point* M′ *multipliées par le facteur* $\cos\theta + i\sin\theta$.

2. Soient, dans l'espace, F et F′ deux figures égales formées de droites issues d'un point O. Ce système a trois droites doubles ; l'une est l'axe OK de la rotation qui fait coïncider les deux figures, et nous appellerons θ l'angle de cette rotation ; les deux autres sont les isotropes OI, OJ du plan II perpendiculaire à OK au point O, et l'on se rappellera que, si OI est une droite double en tant que droite indéfinie, un point M de OI n'est pas un point double.

Étant donnés deux trièdres trirectangles de même orientation Ox, Oy, Oz et Ox', Oy', Oz', qui sont homologues pour F et F′, proposons-nous de déterminer les trois droites doubles. Si M est un point de la droite double OK, ce point (qui est un point double) a les mêmes coordonnées par rapport aux deux trièdres, et l'on a, avec $S = 1$,

$$(1)\qquad \begin{cases} x' \text{ ou } ax + by + cz = Sx, \\ y' \text{ ou } a'x + b'y + c'z = Sy, \\ z' \text{ ou } a''x + b''y + c''z = Sz. \end{cases}$$

Si M est un point de la droite double OI, considéré comme point de la figure F, M′ étant le point correspondant de la figure F′, point distinct de M, situé toutefois sur OM, les coordonnées du point M par rapport au second trièdre sont proportionnelles aux coordonnées du point M′ par rapport à ce second trièdre, c'est-à-dire aux coordonnées du point M par rapport au premier trièdre, de sorte que les coordonnées du point M sont proportionnelles dans les deux systèmes de référence; on a donc encore les relations (1), la valeur de S étant $\cos\theta + i\sin\theta$. Il suit de là que l'équation en S

$$\begin{vmatrix} a-\mathrm{S} & b & c \\ a' & b'-\mathrm{S} & c' \\ a'' & b'' & c''-\mathrm{S} \end{vmatrix} = 0$$

a pour racines 1 et $\cos\theta \pm i\sin\theta$.

Pour vérifier que 1 est racine, on peut écrire, avec $\mathrm{S} = 1$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ a' & b'-1 & c' \\ a'' & b'' & c''-1 \end{vmatrix}, \qquad 1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

et la multiplication donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-a & -b & -c \\ -a' & 1-b' & -c' \\ -a'' & -b'' & 1-c'' \end{vmatrix} = -\Delta = 0,$$

le déterminant étant d'ordre impair. L'équation développée devient

$$\mathrm{S}^3 - (a + b' + c'')\,\mathrm{S}^2 + (a + b' + c'')\,\mathrm{S} - 1 = 0,$$

le coefficient de S résultant, si l'on veut, de l'existence de la racine 1; la suppression de cette racine donne l'équation

$$\mathrm{S}^2 - (a + b' + c'' - 1)\,\mathrm{S} + 1 = 0,$$

dont les racines doivent être $\cos\theta \pm i\sin\theta$. On doit donc avoir

$$a + b' + c'' - 1 = 2\cos\theta,$$

et l'on peut vérifier cette égalité par les formules d'Olinde Rodrigues.

Pour vérifier que les deux droites doubles fournies par les deux dernières valeurs de S sont des isotropes, il suffit d'ajouter les équations (1) après les avoir élevées au carré; on obtient

$$(1 - S^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

[J'ai écarté le cas singulier $\theta = \pi$. Si M est alors un point du plan Π, il est aisé de voir que les coordonnées de ce point relativement aux deux trièdres ont même valeur absolue et des signes contraires : les coordonnées de M rapporté au premier trièdre sont, en effet, les coordonnées de M' rapporté au second trièdre, ou les coordonnées changées de signes de M rapporté au second trièdre, puisque M et M' sont symétriques par rapport à O. Dans ce cas, on a la racine double $S = -1$, et toutes les droites menées par le point O dans le plan Π sont des droites doubles.]

II.

3. Soient, dans l'espace, deux figures F et F' dont l'une est semblable à l'autre ou à la symétrique de l'autre. Il existe un point double O; une certaine droite réelle OK passant en O est une droite double en tant que droite indéfinie; le plan Π perpendiculaire en O à OK est un plan double en tant que plan indéfini. La transformation par laquelle on passe de F à F' est une homographie dont le tétraèdre double a pour sommets les points O, K, I, J, en appelant K le point à

l'infini sur OK, en appelant I et J les points cycliques du plan Π.

Une homographie dépend de 15 paramètres; une similitude dépendant de 7 paramètres seulement, il faut 8 conditions pour qu'une homographie soit une similitude; les conditions relatives à la nature du tétraèdre double sont au nombre de 7 seulement. On a 8 conditions en disant que le cercle de l'infini doit être une conique double.

4. Soit k le rapport d'homothétie des deux figures rendues homothétiques. Si M et M′ sont deux points correspondants des deux figures, la trace Oμ du plan OMM′ sur le plan Π est bissectrice extérieure ou intérieure pour le triangle OMM′ selon que k est positif ou négatif; donc, en appelant μ le point où la droite MM′ perce le plan Π, on a

$$\frac{\overline{\mu M}}{\overline{\mu M'}} = k.$$

Si la transformation est définie par deux triangles semblables ABC, A′B′C′, et par le signe de k, dont la valeur absolue est $\frac{AB}{A'B'}$, *cette relation permet de construire le plan double* Π *en construisant sur les droites* AA′, BB′, CC′ *les trois points* α, β, γ *d'après les relations*

$$\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha A'}} = k, \qquad \frac{\overline{\beta B}}{\overline{\beta B'}} = k, \qquad \ldots.$$

En appelant $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les conjugués des points α, β, γ par rapport aux segments AA′, BB′, CC′, le point double O est l'un des deux points communs aux trois sphères qui ont pour diamètres $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, à savoir celui qui est dans le plan Π. *Si l'on projette* α_1, β_1, γ_1 *sur ce plan en* a_1, b_1, c_1, *les trois circonférences de ce plan qui ont pour diamètres* αa_1, βb_1, γc_1 *ont un point commun qui est le point* O. *Ayant* O, *on a la droite double* OK.

Si l'une des figures F et F′ est égale à la symétrique de l'autre, les deux triangles sont égaux, et l'on a $k = -1$. Les points α, β, γ sont alors les milieux des segments AA′, BB′, CC′. *Les plans perpendiculaires aux droites* AA′, BB′, CC′ *en* α, β, γ *se coupent, dans le plan* $\alpha\beta\gamma$, *en un point* O *tel que l'un des tétraèdres* OABC, OA′B′C′ *est égal au symétrique de l'autre.*

Si les deux figures sont égales, les deux triangles sont égaux, et l'on a $k = +1$. *Le plan* Π *disparaît à l'infini, et il en est de même du point* O. *La droite double continue d'exister.*

5. Si l'on définit un point m de la droite variable MM′ par la relation

$$\frac{\overline{m\mathrm{M}}}{\overline{m\mathrm{M}'}} = \mathrm{S} \times k,$$

S étant une constante, le calcul montre qu'il y a un lieu du point m, et que ce lieu est un plan, si S a l'une des valeurs 1, $\cos\theta \pm \sin\theta$; les trois plans ainsi obtenus sont les plans doubles OIJ, OKI, OKJ.

III.

6. Dans l'espace, les figures que donne la symétrie par rapport à un plan sont fournies au point de la grandeur par la symétrie par rapport à un point; le fait analogue n'a pas lieu en géométrie plane, si l'on

s'interdit de sortir du plan. Il faut alors étudier séparément la similitude (homographie dont les points doubles sont les points cycliques), et la transformation par laquelle on passe d'une figure à une figure inversement semblable (homographie dans laquelle chacun des points cycliques se transforme en l'autre).

Il existe dans chaque cas un point double O, et la recherche des droites doubles conduit aux équations

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - S & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta - S \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta - S & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$S^2 - 2S\cos\theta + 1 = 0, \qquad S^2 - 1 = 0;$$

dans le premier cas, on a comme droites doubles les isotropes du point O; dans le second cas, on a deux droites doubles rectangulaires, avec des faits analogues à ceux du n° 4.

7. Si l'on veut rattacher ce qui se passe à propos du plan aux faits relatifs à l'espace, il faut supposer que les deux trièdres Ox, Oy, Oz et Ox', ..., considérés plus haut, ont leurs axes Oz et Oz' coïncidents ou opposés. Dans le premier cas, l'équation du troisième degré en S devient

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - S & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - S & 0 \\ 0 & 0 & 1 - S \end{vmatrix} = 0,$$

etc. Dans le second cas, cette équation devient

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - S & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta - S & 0 \\ 0 & 0 & -1 - S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(S - 1)(S + 1)^2 = 0;$$

la racine double -1 s'explique par le fait que l'on est ici dans le cas singulier signalé à la fin du n° 2.