H. LAURENT

Équation différentielle des courbes du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 211-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__211_1>

[H3c]

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

Par M. H. Laurent.

L'équation générale des courbes du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$py^3 + (mx + n)y^2 + (ax^2 + bx + c)y$$
$$+ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0,$$

$p, m, n; a, b, c; \alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des constantes qu'il faut éliminer; or en différentiant quatre fois, cinq fois, ..., 9 fois, on a

$$p\frac{d^4y^3}{dx^4}+(mx+n)\frac{d^4y^2}{dx^4}$$
$$+4m\frac{d^3y^2}{dx^3}+(ax^2+bx+c)\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+4(2ax+b)\frac{d^3y}{dx^3}+6.2a\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$p\frac{d^5y^3}{dx^4}+(mx+n)\frac{d^5y^2}{dx^4}$$
$$+5m\frac{d^4y^2}{dx^4}+(ax^2+bx+c)\frac{d^5y}{dx^5}$$
$$+5(2ax+b)\frac{d^4y}{dx^4}+10.2a\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

....

En éliminant p, $mx+n$, m, ax^2+bx+c, $2ax+b$, $2a$, on a

$$\begin{vmatrix}
\frac{d^4y^3}{dx^4} & \frac{d^4y^2}{dx^4} & 4\frac{d^3y^2}{dx^3} & \frac{d^4y}{dx^4} & 4\frac{d^3y}{dx^3} & 6\frac{d^2y}{dx^2} \\
\frac{d^5y^3}{dx^5} & \frac{d^5y^2}{dx^5} & 5\frac{d^4y^2}{dx^4} & \frac{d^5y}{dx^5} & 5\frac{d^4y}{dx^4} & 10\frac{d^3y}{dx^3} \\
\dots & \dots & 6\dots & \dots & 6\dots & 15\dots \\
\dots & \dots & 7\dots & \dots & 7\dots & 21\dots \\
\dots & \dots & 8\dots & \dots & 8\dots & 28\dots \\
\dots & \dots & 9\dots & \dots & 9\dots & 36\dots
\end{vmatrix}=0.$$

Il serait aussi facile d'écrire l'équation différentielle des courbes d'un ordre quelconque, ainsi :

Si l'on pose $a_{ij}=\frac{d^iy^j}{dx^i}$, l'équation différentielle d'une courbe de degré n s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant [1]

$$
\left|\begin{array}{llllllll}
a_{\;\;1\;n} & a_{n+1,n\;\;1} & \frac{n+1}{1}a_{n,n-1} & a_{n+1,n-2} & \frac{n+1}{1}a_{n,n-2} & \frac{(n+1)n}{1\;2}a_{n-1,n\;\;2} & a_{n\;\;1\;1} & \frac{n+1}{1}a_{n,1}\;\ldots \\
a & a_{n+2,n\;\;1} & \frac{n+2}{1}a_{n+1,n-1} & a_{n+2,n-2} & \frac{n+2}{1}a_{n+2,n-2} & \frac{(n+2)(n+1)}{1\;2}a_{n,n\;\;2} & a_{n-\;\;1} & \frac{n+2}{1}a_{n+1\;1}\ldots \\
\\
a_{n\;n} & a_{\frac{n(n+3)}{2},n\;\;1} & \frac{n(n+3)}{2}a_{\frac{n(n+3)}{2}-1\;n-1} & & & & &
\end{array}\right|
$$