

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 186-192

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__186_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1953.

(1903, p. 46.)

Soient, pour un point M d'une courbe (M) quelconque, m et μ les centres des deux premières courbures. MT étant la tangente en M à cette courbe, Δ une direction fixe quelconque, on porte des longueurs égales au rayon de courbure mM en mM_1 et MM_2 sur les parallèles à Δ menées par m et M , en MM_3 sur la tangente MT .

Les tangentes en M_1 , M_2 , M_3 aux courbes décrites respectivement par ces trois points résultent des théorèmes suivants :

I. La tangente en M_1 passe par M .

II. La tangente en M_2 passe par le point de rencontre de la tangente MT et de la perpendiculaire abaissée de m sur $M\mu$.

III. La tangente en M_3 est symétrique de $M_3\mu$ par rapport à la tangente MM_3 . (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

I. Appelons T_1 le point inconnu où la tangente en M_1 à la courbe que décrit ce point rencontre mM .

Puisque la direction de mM_1 est fixe, si $d(m)$ est la différentielle de l'arc décrit par le point m , on a

$$\frac{d. mM_1}{d(m)} = \frac{mM_1}{mT_1}.$$

Mais, par hypothèse,

$$d. mM_1 = d. mM,$$

et, d'après un théorème bien connu,

$$d. mM = d(m).$$

Donc

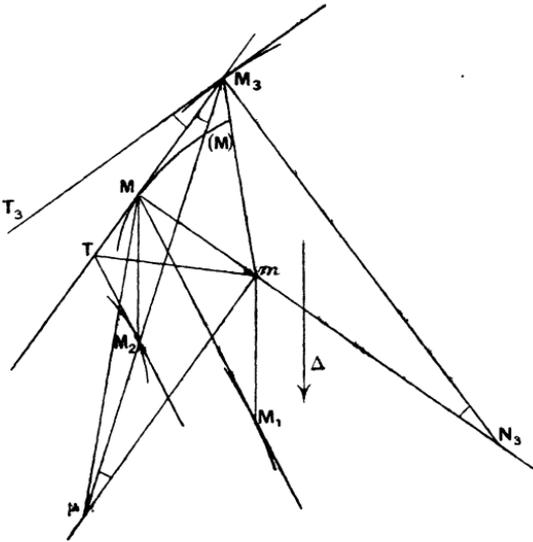
$$m M_1 = m T_1,$$

ou, en tenant compte de l'hypothèse $m M_1 = m M$,

$$m M = m T_1,$$

ce qui montre que le point T_1 coïncide avec le point M .

On peut donc dire que le point M_1 *poursuit* le point M .



II. De même, si la tangente en M_2 coupe la tangente en M au point T , on a, puisque MM_2 est de direction fixe,

$$\frac{d.MM_2}{d(M)} = \frac{MM_2}{MT},$$

ou, en vertu de l'hypothèse $MM_2 = Mm$,

$$\frac{d.Mm}{d(M)} = \frac{Mm}{MT}.$$

Mais, si $d\theta$ est l'angle de contingence en M , on a

$$d.Mm = m \mu . d\theta,$$

$$d(M) = M m . d\theta.$$

Donc

$$\frac{d.Mm}{d(M)} = \frac{m\mu}{Mm}$$

et

$$\frac{m\mu}{Mm} = \frac{Mm}{MT}.$$

Cela montre que les triangles rectangles $mM\mu$ et TMm sont semblables et, puisque leurs côtés de l'angle droit sont deux à deux perpendiculaires, il en est de même de leurs hypoténuses $M\mu$ et mT .

III. Si la normale en M_3 à la courbe (M_3) coupe en N_3 la normale en M à la courbe (M) dont l'angle de contingence est $d\theta$, on a

$$d.MM_3 = mN_3.d\theta.$$

Mais

$$d.Mm = m\mu.d\theta.$$

Donc

$$mN_3 = m\mu.$$

Or l'égalité de MM_3 et de Mm entraîne l'égalité des angles que M_3m fait avec MM_3 et Mm , donc avec $m\mu$ et mN_3 . Il en résulte que les triangles M_3mN_3 et $M_3m\mu$ sont égaux, et, par suite, que

$$\widehat{M_3N_3m} = \widehat{M_3\mu m}.$$

Or

$$\widehat{M_3N_3m} = \widehat{MM_3T_3} \quad (\text{côtés perpendiculaires}),$$

$$\widehat{M_3\mu m} = \widehat{MM_3\mu} \quad (\text{alternes internes}).$$

Donc

$$\widehat{MM_3T_3} = \widehat{MM_3\mu}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

1962.

(1903, p. 95.)

Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 1,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

les équations de deux quadriques rapportées à un système quelconque d'axes rectangulaires passant par leur centre

commun; on demande de démontrer les propositions suivantes :

1° Les conditions qui expriment que ces deux quadriques ont les mêmes axes de figure sont

$$(1) \quad \begin{cases} U = (H g) + (B f) + (F c) = 0, \\ V = (G a) + (F h) + (C g) = 0, \\ W = (A h) + (H b) + (G f) = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$H g - G h = (H g), \quad B f - F b = (B f), \quad \dots$$

2° La condition qui exprime que le plan ayant pour équation

$$l x + m y + n z = 0$$

coupe les deux quadriques données suivant deux coniques ayant les mêmes axes de figure est

$$(l^2 + m^2 + n^2)(lU + mV + nW) - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA + mH + nG & lH + mB + nF & lG + mF + nC \\ la + mh + ng & lh + mb + nf & lg + mf + nc \end{vmatrix} = 0.$$

Si les axes sont obliques et font entre eux des angles λ , μ et ν , les conditions (1) prennent la forme

$$\begin{aligned} & (H g) \sin^2 \lambda + (B f) \sin^2 \mu + (F c) \sin^2 \nu \\ & \quad + (B c) (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) \\ & \quad + [(F g) + (H c)] (\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) \\ & \quad + [(H f) + (B g)] (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (G a) \sin^2 \lambda + (F h) \sin^2 \mu + (C g) \sin^2 \nu \\ & \quad + [(F g) + (C h)] (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) \\ & \quad + (C a) (\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) \\ & \quad + [(G h) + (F a)] (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A h) \sin^2 \lambda + (H b) \sin^2 \mu + (G f) \sin^2 \nu \\ & \quad + [(H f) + (G b)] (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) \\ & \quad + [(G h) + (A f)] (\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) \\ & \quad + (A b) (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu) = 0. \end{aligned}$$

(GENTY.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

1. Étant données deux quadriques de même centre, on sait qu'il existe un trièdre de diamètres conjugués, commun à ces deux quadriques.

Soit (α, β, γ) un point d'un de ces diamètres, les plans diamétraux conjugués de cette direction par rapport aux deux quadriques sont confondus; ces plans sont

$$xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma = 0,$$

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0,$$

$f = 0$ et $\varphi = 0$ étant les équations des quadriques. On doit avoir

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_\gamma}{\varphi'_\gamma}.$$

Le trièdre conjugué commun est donc défini par les trois droites communes aux trois cônes

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}, \quad \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_z}{\varphi'_z}, \quad \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z},$$

équations qui s'écrivent, en les développant,

$$(A h)x^2 + (H b)y^2 + (C f)z^2 + [(G b) + (H f)]yz \\ + [(G h) + (A f)]zx + (A b)xy = 0,$$

$$(G a)x^2 + (F h)y^2 + (C g)z^2 + [(F g) + (C h)]yz \\ + (C a)zx + [(G h) + (F a)]xy = 0,$$

$$(H g)x^2 + (B f)y^2 + (F c)z^2 + (B c)yz \\ + [(F g) + (H c)]zx + [(B g) + (H f)]xy = 0.$$

Pour que les quadriques aient mêmes axes de figure, il faut et il suffit que ces trois cônes soient capables d'un trièdre trirectangle.

En coordonnées rectangulaires, les conditions sont que les

sommes des coefficients de x^2, y^2, z^2 soient nulles; donc

$$U = (Hg) + (Bf) + (Fc) = 0.$$

$$V = (Ga) + (Fh) + (Cg) = 0,$$

$$W = (Ah) + (Hb) + (Gf) = 0.$$

et, en coordonnées obliques, elles sont exprimées par les conditions de l'énoncé.

II. Soit (l', m', n') une direction du plan

$$lx + my + nz = 0, \quad ll' + mm' + nn' = 0.$$

Les plans diamétraux conjugués de (l', m', n') par rapport aux deux surfaces sont

$$(1) \quad l'f'_x + m'f'_y + n'f'_z = 0,$$

$$(2) \quad l'\varphi'_x + m'\varphi'_y + n'\varphi'_z = 0.$$

Quand (l', m', n') varie en restant dans le plan

$$lx + my + nz = 0,$$

l'intersection de (1) et de (2) décrit le cône

$$(3) \quad \begin{vmatrix} l & m & n \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} = 0.$$

D'après la définition même de ce cône, le plan

$$lx + my + nz = 0$$

le coupe suivant deux droites qui forment le système de diamètres conjugués commun aux deux coniques d'intersection du plan et deux surfaces.

Pour que ces deux coniques aient mêmes axes, il faut et il suffit que le plan coupe le cône (3) suivant deux droites rectangulaires.

Or on sait que pour que

$$ux + vy + wz = 0$$

coupe le cône

$$F(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \dots = 0$$

suivant deux droites rectangulaires, il faut que

$$(A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - F(u, v, w) = 0.$$

Appliquant cette formule au cas présent, on obtient la condition

$$0 = (l^2 + m^2 + n^2)(lU + mV + nW) \\ - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA + mH + nG & lH + mB + nF & lG + mF + nC \\ la + mh + ng & lh + mb + nf & lg + mf + nc \end{vmatrix},$$

car les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont respectivement

$$l(Hg) + m(Ga) + n(Ah), \\ l(Bf) + m(Fh) + n(Hb), \\ l(Fc) + m(Cg) + n(Gf). \quad \text{C. Q. F. D.}$$