Mathy

Résistance de l'ellipsoïde immergé dans un fluide parfait incompressible. Intégration des formules. Expression des valeurs approchées. Cas du disque plat et de l'aiguille

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 170-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__170_1>

[S1a]

RÉSISTANCE DE L'ELLIPSOÏDE IMMERGÉ DANS UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE. INTÉGRATION DES FORMULES. EXPRESSION DES VALEURS APPROCHÉES. CAS DU DISQUE PLAT ET DE L'AIGUILLE;

PAR M. MATHY.

On sait que la résistance d'un corps immergé dans un fluide parfait incompressible est le produit de trois facteurs : le premier dépend de la forme du corps; le deuxième est la masse du fluide ayant un volume égal à celui du corps; le troisième est la différence d'accélération du fluide et du corps.

La détermination du premier facteur donne lieu à de sérieuses difficultés; sa valeur pour l'ellipsoïde n'est exprimée dans les auteurs que sous forme d'intégrale; je me propose de rechercher cette expression à l'aide des fonctions elliptiques et de montrer que, dans le cas où les limites d'intégration ne sont pas des demi-périodes, les valeurs approchées sont encore applicables à la pratique de la même façon que les fonctions circulaires.

Soient a, b, c les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde, $a > b > c$; le premier facteur $\mathbf{a}_1$ de sa résistance suivant l'axe des x est

$$(1)\qquad \mathbf{a}_1 = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}}{\displaystyle\frac{2}{abc} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}}.$$

Les valeurs des deux autres coefficients $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{c}_1$ se déduisent de (1) par la permutation des lettres a et b ou a et c.

La question est ramenée à trouver la valeur de

$$(2)\qquad \mathrm{X} = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

A cet effet, on pose

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= z - \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),\\ e_1 &= \tfrac{1}{3}(a^2+b^2-2c^2),\\ e_2 &= \tfrac{1}{3}(a^2+c^2-2b^2),\\ e_3 &= \tfrac{1}{3}(b^2+c^2-2a^2). \end{aligned}\right.$$

L'expression (2) peut alors s'écrire

$$(4)\qquad \mathrm{X} = \int_{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}^\infty \frac{dz}{(z-e_3)\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Or, si $z = \wp v$, les limites d'intégration seront $\wp v = \infty$ et

$$(5) \qquad \wp v = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

De ce que

$$\wp' v = -2\sqrt{(\wp v - e_1)(\wp v - e_2)(\wp v - e_3)}$$

on a

$$(6) \qquad X = \int \frac{-2\,dv}{\wp v - e_3}.$$

Mais on sait que

$$\wp(v + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp v - e_3};$$

il en résulte que

$$(7) \qquad X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \int [e_3 - \wp(v + \omega_3)]\,dv.$$

Par intégration

$$X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [e_3 v + \zeta(v + \omega_3)]_{\wp v = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}^{\wp v = \infty}.$$

Mais $\wp v = \infty$ fournit $v = 0$, d'où

$$(8) \qquad X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\eta_3 - e_3 v - \zeta(v + \omega_3)]_{\wp v = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

On développe $\zeta(v + \omega_3)$ et l'on remplace les différences $e_3 - e_2$, $e_3 - e_1$ par leurs valeurs déduites de (3), et l'on obtient

$$(9) \qquad X = \frac{-2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left(e_3 v + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' v}{\wp v - e_3} \right).$$

On aurait de même

$$Y = \frac{-2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left(e_2 v + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' v}{\wp v - e_2} \right),$$

$$Z = \frac{-2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left(e_1 v + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' v}{\wp v - e_1} \right).$$

L'argument v est déterminé par $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. On remarque qu'il est réel et compris entre o et ω; car :

1° Le module $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} < 1$;

2° $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ est plus grand que e_1 ou $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 - c^2)$.

D'un autre côté, on obtient les trois fractions $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_3}$, $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_2}$, $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1}$ à l'aide de (3) et (5); elles sont égales à $-\frac{bc}{a}$, $\frac{-ca}{b}$, $\frac{-ab}{c}$.

En remplaçant dans (1) X par sa valeur (9), on trouve $\mathbf{a}_1$; on détermine de même $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{c}_1$ à l'aide de Y et Z.

Expression des valeurs approchées. — Au lieu de $\zeta(v)$, on prend son terme principal $\frac{1}{v}$ et l'on a

$$X = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\left(\frac{bc}{a} - e_3 v - \frac{1}{v}\right). \tag{9'}$$

Il reste à calculer v; on sait qu'il faut tenir compte du signe de e_2 ou de $a^2 + c^2 - 2b^2$.

Premier cas : $e^2 < 0$. — La demi-période K se calcule à l'aide des Tables de Legendre; on sait que

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

On remarque que

$$k'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Dès lors, on obtient v par la forme circulaire

$$\cos\frac{\pi}{K}\sqrt{a^2 - c^2}.v = \frac{s}{q},$$

avec

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - k'^{\frac{1}{2}}}{1 + k'^{\frac{1}{2}}},$$

$$s = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{pu - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{pu_1 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{pu - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{pu_1 - e_3}} = \frac{1}{2}\,\frac{b - ak'^{\frac{1}{2}}}{b + ak'^{\frac{1}{2}}}.$$

D'où

$$(10) \qquad v = \frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - c^2}}\ \text{arc.cos}\,\frac{\left(b - ak'^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + k'^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(b + ak'^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - k'^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Second cas : $e_2 > 0$. — Les formules précédentes s'appliquent avec changement de e_1, e_2, e_3, p, K, cos en $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$, $-p$, K′, cos hyp. Or K′ se calcule encore par les Tables de Legendre ; à l'aide de

$$k'^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

On en déduit

$$(11) \qquad v = \frac{K'}{\pi\sqrt{a^2 - c^2}}\ \text{arc.cos hyp.}\,\frac{\left(b - ck^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + k^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(b + ck^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - k^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Les formules (9′), (10) et (11) fournissent donc le moyen de calculer X ; pour obtenir Y et Z, il faut considérer

$$\left(\frac{ac}{b} - e_2 v - \frac{1}{v}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ab}{c} - e_1 v - \frac{1}{v}\right),$$

v a la précédente valeur (10) ou (11).

Ellipsoïde de révolution aplati. Disque circulaire plat. — Lorsque $a = b$, $k^2 = 0$ et les fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions circulaires. X et Y prennent la forme $\frac{0}{0}$ et il faut leur appliquer la règle élémentaire de la dérivation. Quant à Z_1 les formules de dégénérescence conduisent successivement à

$$(12)\quad \begin{cases} Z = \dfrac{2}{(a^2-c^2)^2}\left(\dfrac{a^2}{c} - \dfrac{3e_1}{2}v - c\right) \\[2ex] = \dfrac{2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \operatorname{arc\,sin}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right). \end{cases}$$

Pour le disque circulaire plat, c étant très petit par rapport à a, a^2-c^2 tend vers a^2; d'où

$$(13)\qquad Z = \frac{2}{a^3}\left(\frac{a}{c} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Dès lors

$$(14)\qquad \mathbf{c}_1 = \frac{\dfrac{2}{a^3}\left(\dfrac{a}{c} - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{2}{a^2c} - \dfrac{2}{a^2c} + \dfrac{\pi}{a^3}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{c} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Le rapport $\frac{a}{c}$ est très grand; mais le second facteur de la résistance devient très petit, puisque c'est la masse du fluide ayant le volume du disque; on prend le rapport du produit de ces deux facteurs au produit des deux facteurs relatifs à la sphère de même rayon que le disque; le premier facteur est $\frac{1}{2}$, on a ainsi

$$(15)\qquad \frac{R_z \text{ du disque } a}{R_z \text{ de la sphère } a} = \frac{\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{a}{c} - \dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{4}{3}\pi a^2 c}{\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{3}\pi a^3} = \frac{4}{\pi}\,\frac{a - c\dfrac{\pi}{2}}{a}.$$

Ce rapport tend vers $\frac{4}{\pi}$ avec c tendant vers o. D'où, si $R_x = R_y = 0$, c'est-à-dire si le disque se meut perpendiculairement à son plan, sa résistance se réduit à (15).

Ellipsoïde de révolution allongé. Double aiguille. — Dans ce cas, $b^2 = c^2$, $k^2 = 1$ et il y a dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions hyperboliques. Y et Z prennent la forme $\frac{0}{0}$.

Quant à X, on a

$$(16)\quad \begin{cases} X = \dfrac{2}{(a^2-c^2)^2}\left(\dfrac{c^2}{a} - \dfrac{3e_3}{2}v - a\right) \\[2ex] \quad = \dfrac{2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right). \end{cases}$$

Pour la double aiguille, c est très petit, a^2-c^2 tend vers a^2, d'où

$$(17)\qquad X = \frac{2}{a^3}\left(\log\frac{2a}{c} - 1\right)$$

et

$$(18)\qquad \mathbf{a}_1 = \frac{\dfrac{2}{a^3}\log\dfrac{2a}{c} - \dfrac{2}{a^3}}{\dfrac{2}{ac^2} + \dfrac{2}{a^3} - \dfrac{2}{a^3}\log\dfrac{2a}{c}} + \frac{\log\dfrac{2a}{c} - 1}{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 - \left(\log\dfrac{2a}{c} - 1\right)},$$

$\mathbf{a}_1$ tend vers o avec c; comme le volume est très petit, on peut dire que $R_x = 0$.