Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 140-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__140_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1929.

(1902, p 288)

Étant donnés deux points fixes F, A *et une droite* Δ :

1° *On considère les paraboles de foyer* F *qui passent par* A. *Lieu des pôles des droites qui joignent* A *aux points où ces paraboles coupent* Δ.

2° *On considère les cercles passant par* F *et tangents à* Δ. *Enveloppe des droites qui joignent les points de contact de* Δ *aux points de contact des tangentes issues de* A.

(*Alpha.*)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

I. Prenons pour axes de coordonnées AF et la perpendiculaire à cette droite menée par A; soit $AF = a$.

La directrice d'une des paraboles considérées sera tangente au cercle de centre A et de rayon a; ce sera donc

$$x\cos\theta + y\sin\theta - a = 0,$$

et la parabole Π aura pour équation

$$(x-a)^2 + y^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta - a)^2$$

ou

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 + 2a(\cos\theta - 1)x + 2a\sin\theta y = 0.$$

Soient $y = tx$ une droite AM et $y = mx + n$ la droite Δ. Exprimons que ces deux droites se coupent sur Π. Leur point de rencontre est

$$x = \frac{n}{t-m}, \qquad y = \frac{nt}{t-m}.$$

En écrivant que ce point est sur Π, nous obtenons

$$(1) \quad n(\sin\theta - t\cos\theta)^2 + 2a(\cos\theta - 1 + t\sin\theta)(t-m) = 0.$$

Le pôle de AM est à la rencontre de la tangente à Π en A et du diamètre correspondant à la direction t.

Ces deux droites ont respectivement pour équation

$$(2) \qquad y = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}x,$$

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &(x\sin\theta - y\cos\theta)(\sin\theta - t\cos\theta)\\ &\qquad + a(\cos\theta + t\sin\theta - 1) = 0.\end{aligned}\right.$$

Le lieu cherché s'obtiendra en éliminant θ et t entre les équations (1), (2), (3). La relation (1) peut s'écrire, en tenant compte de (3),

$$(1') \quad n(\sin\theta - t\cos\theta) - 2(x\cos\theta - y\sin\theta)(t-m) = 0.$$

De (2), on tire

$$\sin\theta = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Les relations (1′) et (3) deviennent

$$n[2xy - t(x^2-y^2)] - 2y(x^2+y^2)(t-m) = 0$$

et

$$y[2xy - t(x^2-y^2)] + 2a(txy - y^2) = 0,$$

ou bien

$$2nxy + 2my(x^2+y^2) - [n(x^2-y^2) + 2y(x^2+y^2)]t = 0,$$
$$2xy - 2ay - (u^2 - y^2 - 2ax)t = 0.$$

Le lieu cherché est donc

$$(x^2-y^2-2ax)[nx + m(x^2+y^2)]$$
$$- (x-a)[n(x^2-y^2) + 2y(x^2+y^2)] = 0$$

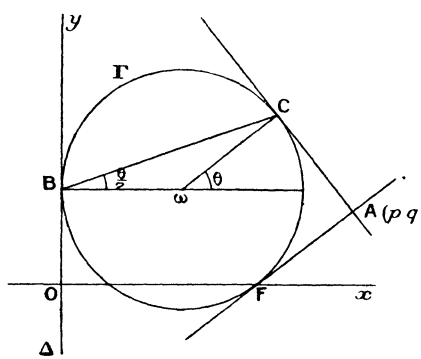
ou

$$(x^2+y^2)(mx^2 - 2xy - my^2 - 2amx + 2ay - an) = 0.$$

C'est donc l'hyperbole équilatère

$$m(x^2-y^2) - 2xy - 2amx + 2ay - an = 0.$$

II. Pour traiter la seconde partie, je prends comme axes la



droite Δ et FO perpendiculaire à Δ. Le centre ω d'une des circonférences Γ décrit une parabole de foyer F et de directrice Δ; ses coordonnées sont donc, en posant $FO = d$,

$$\frac{\beta^2 + d^2}{2d} \quad \text{et} \quad \beta.$$

Les coordonnées d'un point C de Γ sont

$$X = \frac{\beta^2 + d^2}{2d}(1 + \cos\theta),$$

$$Y = \beta + \frac{d^2 + \beta^2}{2d}\sin\theta = \frac{(d^2 + \beta^2)\sin\theta + 2d\beta}{2d},$$

et la tangente en C a pour équation

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta &= X\cos\theta + Y\sin\theta \\ &= \frac{(d^2 + \beta^2)(1 + \cos\theta) + 2d\beta\sin\theta}{2d}. \end{aligned}$$

J'exprime qu'elle passe au point $A(p, q)$:

$$2d(p\cos\theta + q\sin\theta) = (d^2 + \beta^2)(1 + \cos\theta) + 2d\beta\sin\theta$$

ou, en posant $\tang\frac{\theta}{2} = t$,

$$(4) \qquad \beta^2 + dpt^2 + 2d\beta t - 2dqt + d^2 - pd = 0.$$

La droite BC a pour équation

$$y - \beta = x\tang\frac{\theta}{2} \qquad \text{ou} \qquad y - tx - \beta = 0.$$

La relation (4) entre les paramètres β et t montre que cette droite enveloppe une conique. L'équation ponctuelle de cette conique s'obtient aisément. C'est

$$\begin{aligned} &(d - p)(x^2 - y^2) - 2qxy \\ &\quad + 2d(p - d)x + 2dqy + d(pd - p^2 - q^2) = 0, \end{aligned}$$

hyperbole équilatère.

Remarque. — On aurait pu se dispenser de chercher l'enveloppe de BC par le calcul. Transformons, en effet, la figure par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur le cercle de centre F et de rayon FO.

La polaire réciproque de la circonférence ω est une parabole Π de foyer F passant en O, pôle de Δ. Au point fixe A correspond une certaine droite Δ_1 fixe. La polaire de B passe en O; c'est la tangente en O à Π.

A la droite AC correspond un point I de Π situé à l'intersection de Δ_1 avec la polaire de C; mais cette polaire est la tangente à Π en ce point. Le pôle de BC est donc à l'intersection U des tangentes à Π en O et en I, ce dernier point étant un de ceux où Π rencontre Δ_1. La recherche de l'enveloppe de BC revient donc à la recherche du lieu de U qui fait l'objet de la première partie de ce problème.