Certificats de mathématiques préparatoires aux sciences physiques et industrielles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 136-140

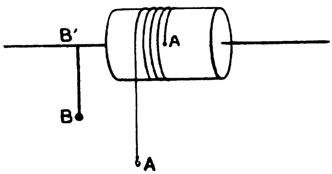
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__136_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES AUX SCIENCES PHYSIQUES ET INDUSTRIELLES.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un tambour léger de* $0^m,25$ *de rayon est monté sur un axe horizontal qui peut tourner librement sur lui-même.*

Sur ce tambour est enroulé un fil inextensible dont l'une des extrémités A′ *est attachée au tambour. Un poids de*



20^{kg} *est fixé à l'extrémité* B *d'un bras rigide* B′B *de* $0^m,50$ *de longueur monté d'équerre sur l'axe horizontal et faisant corps avec lui.*

On néglige le poids du tambour, du fil et du bras.

1° *Étudier les petites oscillations du système quand on accroche, sans choc, à l'extrémité libre* A *du fil un très petit poids* a.

2° *Déterminer les positions d'équilibre du système, en supposant que le poids accroché en* A *soit quelconque et non plus très petit. Condition de possibilite de l'équilibre.*

3° *Démontrer qu'il existe une valeur* α *du poids* a *pour laquelle le système, lâché sans choc, tend, sans osciller, vers l'une des positions d'équilibre. Trouver à* 1° *près* *l'angle, avec la verticale inférieure, du bras* B′B *dans cette position d'équilibre.*

4° *Montrer qu'en accrochant sans choc en* A *un poids* 2α *le système prendra un mouvement continu de rotation et déterminer les vitesses angulaires successives à chaque passage du bras* B′B *par la verticale inférieure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a donné à une certaine variable* x *les valeurs successives*

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$$

et l'on a obtenu, pour une fonction y *de cette variable, les valeurs correspondantes*

$$0, \quad 103, \quad 252, \quad 439, \quad 668, \quad 932.$$

1° *Vérifier, par l'examen des différences, que la fonction* y *peut être convenablement représentée par la formule*

$$y = ax + bx^2.$$

2° *Tirer le parti le plus avantageux des observations ci-dessus pour la détermination des constantes* a *et* b.

(Novembre 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$x^3 = ay^2,$$

a *désignant une constante.*

1° *Indiquer le nombre des normales que l'on peut mener à la courbe d'un point de* Ox.

2° M *désignant un point de la courbe et* M′ *le point symétrique par rapport à* Ox, *trouver le lieu du point d'intersection de la tangente en* M *avec le rayon vecteur* OM′ *quand* M *décrit* (Γ).

3° *Calculer l'aire comprise entre l'arc* OM *de la courbe* (Γ) *et la corde* OM, *ainsi que les volumes* (V) *et* (W) *engendrés par la rotation de cette aire respective-*

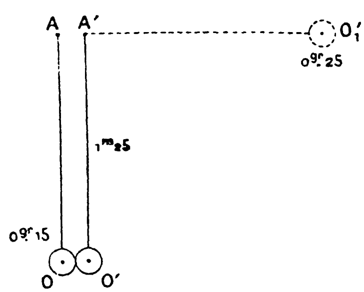
ment autour de Ox *et de* Oy; *déterminer le point* **M** *de telle sorte que* (V) *et* (W) *soient égaux.*

4° *Le volume* (V) *étant supposé rempli d'une matière pesante dont la densité en chaque point est* $\frac{\mu}{(x+a)^2}$, μ *représentant une constante, calculer la masse totale renfermée à l'intérieur de ce volume.*

5° *Trouver les trajectoires orthogonales de la famille des courbes engendrée par* (Γ) *quand le paramètre* a *varie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Théorème des moments des quantités de mouvements. Équation du mouvement d'un solide mobile sans frottement autour d'un axe fixe.*

II. *Deux pendules simples* AO *et* A′O′ *sont disposés de manière qu'au repos les deux très petites masses* O *et* O′,



supposées sphériques, soient tangentes, et que leur ligne des centres OO′ *soit horizontale. On écarte le pendule* O′A′ *de manière à le placer horizontalement en* $A'O'_1$, *dans le plan* A′AO, *puis on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Il se produit alors un choc, après lequel les deux sphères* O *et* O′ *s'élèvent à des hauteurs* h *et* h' *au-dessus de l'horizontale* OO′. *On demande de calculer ces deux hauteurs* h *et* h', *en supposant que les deux sphères* O *et* O′ *soient parfaitement élastiques.*

Données : la longueur du pendule A′O′ *est de* $1^m,25$; *les poids des sphères* O *et* O′ *sont respectivement de* $0^g,25$ *et* $0^g,15$. (Novembre 1904.)

Paris.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée la chaînette*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

(*a constante positive*) *qui coupe l'axe* Oy *au point* A, *on prend sur cette courbe un point* M, *d'abscisse* x *et l'on abaisse de ce point la perpendiculaire* MP *sur* Ox; *puis on fait tourner la figure autour de l'axe* Ox.

Calculer :

1° *Le volume engendré par l'aire* OAMP;

2° *L'aire engendrée par l'arc* AM.

II. *L'expression*

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy$$

est-elle une différentielle totale?

En supposant que x *et* y *désignent les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, calculer l'intégrale*

$$\int \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy$$

le long d'une courbe allant du point $x = 0$, $y = 0$ *au point* $x = 2$, $y = 4$.

III. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + ky = 0,$$

où k *est une constante donnée.*

Quelles sont les différentes formes de l'intégrale générale suivant les valeurs de k?

Examiner en particulier les cas

$$k = 1, \qquad k = 2, \qquad k = -3.$$

Épreuve pratique. — I. *Un point pesant* M *est attiré par un point fixe* A *proportionnellement à la distance. Quand le point* M *est placé en* O *à une distance* $AO = a$ *au-dessous du point* A, *l'attraction de* A *sur le point* M *est égale et opposée au poids du point.*

Trouver le mouvement du point M, *en supposant qu'il soit abandonné sans vitesse au point* A. *Quelle est la durée de l'oscillation du point* M? *Quelle est sa vitesse quand il arrive en* O?

Application numérique. — *En employant le système* C.G.S., *on suppose*

$$a = 10^{\text{cm}}, \qquad g = 980.$$

II. *Calculer les intégrales définies*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tang}^4 x\, dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\, dx$$

à 0,01 *près.* (Octobre 1904.)