

PAUL NIEWENGLOWSKI

**Note d'arithmétique**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 5  
(1905), p. 103-105

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1905\\_4\\_5\\_\\_103\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__103_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[19c]

**NOTE D'ARITHMETIQUE;**

PAR M. PAUL NIEWENGLOWSKI.

---

Posons

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1},$$

et soit  $d$  le plus petit multiple commun des nombres  $1, 2, \dots, n-1$ . Je dis que :

1° Si  $n$  n'est pas premier, le produit  $sd$  n'est pas divisible par  $n$ ;

2° Si  $n$  est premier et supérieur à 3, le produit  $sd$  est divisible par  $n^2$ .

1° Soient  $a, b, \dots, l$  les nombres premiers inférieurs à  $n$ , et  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  les plus grands exposants tels qu'on ait  $a^\alpha < n, b^\beta < n, \dots, l^\lambda < n$ ; on a

$$d = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$$

et, par suite, le produit

$$sd = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

peut s'écrire, si l'on isole le terme  $\frac{1}{a^\alpha}$ ,

$$sd = b^\beta \dots l^\lambda + \text{mult. } a.$$

Ce produit n'est donc pas divisible par  $a$ , et il en est de même pour chacun des nombres premiers inférieurs à  $n$ . Donc si  $n$  est un nombre composé,  $sd$  n'est pas divisible par  $n$ .

2° On sait que, si  $n$  est premier, toute fonction symétrique entière, à coefficients entiers, des nombres  $1, 2, 3, \dots, n-1$  est multiple de  $n$ , si son degré n'est pas divisible par  $n-1$ . Donc, en posant

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1),$$

si  $n > 3$ , on a

$$P^2 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \right) = \text{mult. } n.$$

Mais

$$P^2 \left( \frac{1}{1(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + \dots + \frac{1}{(n-1)1} \right) = P^2 \frac{2s}{n};$$

d'où en ajoutant

$$P^2 \left( \frac{n}{n-1} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \dots + \frac{n}{(n-1)^2} \right) = \text{mult. } n + P^2 \frac{2s}{n}.$$

ou encore

$$d. P \frac{2s}{n} = \text{mult. } n$$

ou

$$2 ds = \text{mult. } n^2 \quad \text{ou} \quad ds = M n^2.$$

C. Q. F. D.