NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL NIEWENGLOWSKI

Note d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 103-105

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__103_1>

[19c]

NOTE D'ARITHMETIQUE;

PAR M. PAUL NIEWENGLOWSKI.

Posons

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1},$$

et soit d le plus petit multiple commun des nombres $1, 2, \ldots, n-1$. Je dis que :

1° *Si n n'est pas premier, le produit sd n'est pas divisible par n;*

2° *Si n est premier et supérieur à 3, le produit sd est divisible par n^2.*

1° Soient a, b, ..., l les nombres premiers inférieurs à n, et α, β, ..., λ les plus grands exposants tels qu'on ait $a^\alpha < n$, $b^\beta < n$, ..., $l^\lambda < n$; on a

$$d = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$$

et, par suite, le produit

$$sd = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)$$

peut s'écrire, si l'on isole le terme $\frac{1}{a^\alpha}$,

$$sd = b^\beta \dots l^\lambda + \text{mult. } a.$$

Ce produit n'est donc pas divisible par a, et il en est de même pour chacun des nombres premiers inférieurs à n. Donc si n est un nombre composé, sd n'est pas divisible par n.

2° On sait que, si n est premier, toute fonction symétrique entière, à coefficients entiers, des nombres 1, 2, 3, ..., $n-1$ est multiple de n, si son degré n'est pas divisible par $n-1$. Donc, en posant

$$P = 1.2.3\dots(n-1),$$

si $n > 3$, on a

$$P^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \text{mult. } n.$$

Mais

$$P^2\left(\frac{1}{1(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + \dots + \frac{1}{(n-1)1}\right) = P^2\frac{2s}{n};$$

d'où en ajoutant

$$P^2\left(\frac{n}{n-1} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \dots + \frac{n}{(n-1)^2}\right) = \text{mult. } n + P^2\frac{2s}{n}.$$

ou encore

$$d.P\frac{2s}{n} = \text{mult. } n$$

ou

$$2\,ds = \text{mult. } n^2 \qquad \text{ou} \qquad ds = \mathrm{M}\,n^2.$$

C. Q. F. D.