Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 94-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__94_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1938.

(1902, p. 479.)

Le centre de gravité des pieds des normales menées d'un point quelconque C *à une conique de centre* O *est au milieu de la distance du point* O *au centre de gravité des points* *d'intersection de la conique et d'un cercle de centre C et de rayon quelconque.* (M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Supposons que la conique soit l'ellipse d'équation

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soient (α, β) les coordonnées du point C. On sait que l'équation aux abscisses des pieds des normales à (1) issues de C est

$$c^4x^4 - 2a^2\alpha c^2x^3 + a^2x^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) + \ldots = 0.$$

La somme de ces abscisses est $\frac{2a^2\alpha}{c^2}$: par conséquent l'abscisse du centre de gravité des pieds est

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2a^2\alpha}{c^2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a^2\alpha}{2c^2}.$$

Les coordonnées de ce centre de gravité sont donc

$$(2) \qquad X = \frac{a^2\alpha}{2c^2}, \qquad Y = \frac{b^2\beta}{2c^2}.$$

D'autre part, l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R s'écrit

$$(3) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

ou

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

L'élimination de y entre (1) et (2) donne l'équation du quatrième degré en x

$$\left(\frac{c^2x^2}{a^2} - 2\alpha x + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2\right)^2 = 4\beta^2\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ou

$$\frac{c^4x^4}{a^4} - \frac{4\alpha c^2}{a^2}x^3 + \ldots = 0.$$

La somme des abscisses des quatre points d'intersection de (1) et (4) est $\frac{4a^2\alpha}{c^2}$. Donc, l'abscisse du centre de gravité de ces quatre points est $\frac{a^2\alpha}{c^2}$. Les coordonnées de ce centre de gravité sont, par suite,

$$(5) \qquad X_1 = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \qquad Y_1 = -\frac{b^2\beta}{c^2}.$$

La comparaison des formules (2) et (5) démontre la proposition énoncée.

Le centre de gravité des points d'intersection d'un cercle et d'une ellipse ne change pas lorsque le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.