NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HADAMARD

Sur les séries de la forme $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 529-533

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__529_0>

[D2b, I9a]

SUR LES SÉRIES DE LA FORME $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$;

PAR M. HADAMARD.

En reprenant une démonstration relative aux propriétés de la fonction de Riemann

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots + \frac{1}{n^z} + \ldots,$$

j'ai été conduit à en examiner de plus près le mécanisme. Je suis arrivé ainsi, relativement aux séries de la forme

$$F(z) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

où les λ_n sont des nombres réels et les a_n des nombres *positifs*, à quelques remarques qui peuvent avoir leur utilité.

1. Soit A la valeur de $F(p)$, p étant un nombre réel (compris, bien entendu, dans la région de convergence de la série). Donnons à z la valeur complexe $p+iq$ et considérons la quantité

$$\frac{1}{A} F(p+iq) = f(q) + i\varphi(q) = \xi + i\eta.$$

On a

$$\left\{\begin{aligned} A f(q) &= \sum a_n e^{-\lambda_n p} \cos(\lambda_n q) = \sum \alpha_n \cos\theta_n, \\ A\varphi(q) &= -\sum a_n e^{-\lambda_n p} \sin(\lambda_n q) = \sum \alpha_n \sin\theta_n, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

en désignant par α_n la quantité $a_n e^{-\lambda_n p}$ et par θ_n l'argument $-\lambda_n q$. On a d'ailleurs visiblement

$$\sum \alpha_n = \text{A},$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| < \text{A}.$$

Changeons q en $2q$ et comparons aux expressions (2) les suivantes :

$$f(2q) = \xi_1 = \sum \frac{\alpha_n}{\text{A}} \cos 2\theta_n,$$

$$\varphi(2q) = \eta_1 = \sum \frac{\alpha_n}{\text{A}} \sin 2\theta_n.$$

Pour cela, nous considérerons la quantité

$$\frac{1}{\text{A}} \sum \alpha_n (h \cos\theta_n + k \sin\theta_n + l)^2,$$

où h, k, l sont trois nombres réels quelconques. Si l'on remarque que l'on a

$$h^2 \cos^2\theta_n + k^2 \sin^2\theta_n = \frac{h^2 + k^2}{2} + \frac{h^2 - k^2}{2} \cos 2\theta_n,$$

cette quantité s'écrira

$$\begin{aligned} l^2 + \frac{h^2 + k^2}{2} + \frac{h^2 k^2}{2} \xi_1 + hk\eta_1 + 2hl\xi + 2kl\eta \\ = (l + h\xi + k\eta)^2 + \left(\frac{1 + \xi_1}{2} - \xi^2\right) h^2 \\ + (\eta_1 - 2\xi\eta) hk + \left(\frac{1 - \xi_1}{2} - \eta^2\right) k^2. \end{aligned}$$

Or, la quantité précédente est essentiellement positive. Donc, il faut que cette forme quadratique soit définie; par conséquent, que l'on ait

$$(3) \qquad \xi_1 > 2\xi^2 - 1,$$

$$(4) \qquad \left(\frac{1 + \xi_1}{2} - \xi^2\right)\left(\frac{1 - \xi_1}{2} - \eta^2\right) - \left(\frac{\eta_1}{2} - \xi\eta\right)^2 \geqq 0.$$

La première inégalité, qui est d'ailleurs comprise dans la seconde, exprime le résultat suivant :

Si ξ *est positif, et que l'on pose*

$$\xi = \cos\psi \qquad \left(0 < \psi < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\xi_1 = \cos\psi_1 \qquad (0 < \psi_1 \leqq \pi),$$

on aura

$$(5) \qquad \psi_1 \leqq 2\psi.$$

2. Quant à l'inégalité (4), elle nous montre que, le point (ξ, η) étant donné, le point (ξ_1, η_1) est intérieur au cercle C dont un diamètre est situé suivant la droite $\eta_1 = 2\xi\eta$, les abscisses de ses extrémités étant $2\xi^2 - 1$, $1 - 2\eta^2$.

Considérons le module $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ de $\frac{1}{A}F(p + iq)$ et le module $\rho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$ de $\frac{1}{A}F(p + 2iq)$.

Le centre du cercle C, à savoir le point $(\xi^2 - \eta^2, 2\xi\eta)$, est situé à une distance ρ^2 de l'origine; le rayon du même cercle est $1 - \rho^2$.

Si donc ρ^2 est plus petit que $\frac{1}{2}$, le cercle C contient l'origine à son intérieur; mais si $\rho > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tout point de ce cercle est à une distance de l'origine au moins égale à $2\rho^2 - 1$. On arrive donc à l'énoncé suivant :

Si l'on pose

$$\rho = |\xi + i\eta| = \cos\chi,$$

$$\rho_1 = |\xi_1 + i\eta_1| = \cos\chi_1$$

et que l'angle χ *soit inférieur à* $\frac{\pi}{4}$, *on aura*

$$\chi_1 \leqq 2\chi.$$

3. Il est clair maintenant qu'on peut appliquer à plusieurs reprises les deux propositions que nous venons d'énoncer et qu'on obtient ainsi les suivantes :

Si l'on pose

$$f(q) = \cos[\psi(q)],$$
$$|f(q) + i\varphi(q)| = \cos[\chi(q)],$$

on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi(q) &\leqq 2^k \psi\left(\frac{q}{2^h}\right), \\ \chi(q) &\leqq 2^h \chi\left(\frac{q}{2^h}\right), \end{aligned} \right.$$

la première inégalité supposant toutefois que le second membre est plus petit que π; la seconde, que son second membre est plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

Enfin, dans les deux inégalités précédentes, on peut faire grandir h indéfiniment. On a sensiblement, pour q très petit,

$$f(q) = 1 - \frac{q^2}{2A} F''(p) = 1 - \frac{1}{2}\psi^2(q), \qquad \varphi(q) = \frac{q}{A} F'(p),$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| = 1 - \frac{q^2}{2}\left(\frac{F''(p)}{A} - \frac{F'^2(p)}{A^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\chi^2(q),$$

et, par suite,

$$\psi(q) = q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)}}, \qquad \chi(q) = q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)} - \frac{F'^2(p)}{F^2(p)}}.$$

Si, dans ces relations, on change q en $\frac{q}{2^h}$, pour reporter le résultat obtenu dans les inégalités (6), *on a*

$$f(q) \geqq \cos\left(q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)}}\right),$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| \geqq \cos\left(q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)} - \left(\frac{F'(p)}{F(p)}\right)^2}\right),$$

pourvu que l'argument du cosinus soit plus petit que π *dans la première inégalité, plus petit que* $\frac{\pi}{2}$ *dans la seconde.*