NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1904). Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 506-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__506_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1904).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. C. CLAPIER.

On donne, dans un plan, deux points A *et* A′ *et une droite* D *menée par* A; *un cercle variable* Γ, *situé dans ce plan, passe constamment par* A *et* A′. *Autour du point variable* M *où ce cercle rencontre* D, *on fait tourner la tangente en ce point à* Γ *d'un angle donné* α *dans le plan orienté; soit* Δ *la droite ainsi obtenue.*

1° *La droite* Δ *rencontre* Γ *en un point* M′ *autre que* M; *le lieu des points* M′ *est une droite* D′ *que l'on construira.*

Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale du point A′ *sur* Δ.

2° *Démontrer que le lieu géométrique du pôle* P *de* Δ *par rapport à* Γ *est une droite* d.

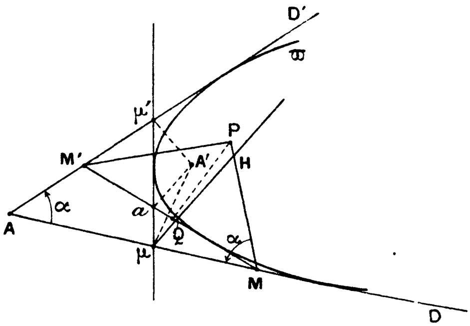
3° *Soit* d_1 *une droite donnée dans le plan; chercher si cette droite peut être regardée comme lieu* d *du point* P, *en choisissant convenablement la droite* D *et l'angle* α.

4° *Trouver l'enveloppe de* d *lorsque* D *tourne autour du point* A, *l'angle* α *restant constant.*

5° *Soit* T *le triangle dont les sommets sont le point* P *et les points de rencontre de* Δ *et* Γ : *étudier le déplacement du cercle circonscrit à ce triangle.*

I. Si l'on fait tourner la droite D d'un angle α autour du point A, dans le sens de l'orientation du plan, on obtiendra la droite D'. Le cercle variable Γ, qui passe par les points donnés A et A', rencontre les droites D et D', aux points M et M'; les projections orthogonales du point A' sur les côtés du triangle AMM' sont sur une droite de Simpson $\overline{\mu\mu'}$ (*fig.* 1). Ainsi la projection a

Fig. 1.



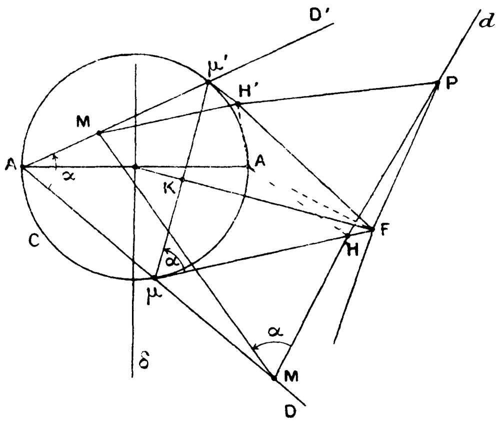
du point A' sur la corde variable $\overline{MM'}$ ou Δ est une droite; il en résulte que Δ enveloppe une parabole ϖ admettant cette droite comme tangente au sommet et le point A' comme foyer.

Remarques. — 1° Projetons le point A' en H sur la tangente MP au cercle Γ; les points a, μ, H sont sur le cercle décrit sur A'M comme diamètre. L'angle $\widehat{a\mu H}$ est égal à α; il en résulte que MP enveloppe une parabole confocale à la première, ayant avec celle-ci la tangente commune D. D'ailleurs, en général, si un angle fixe se meut de manière que son sommet décrive une tangente à une parabole et que l'un de ses côtés touche cette parabole, l'autre côté enveloppe une parabole ayant même foyer que la première.

2° Le milieu Q de la tangente MM′ à la parabole ϖ inscrite dans l'angle DAD′, décrit une droite, qui est la tangente à la parabole ϖ parallèle à la polaire du point A. Donc la perpendiculaire PQ à Δ enveloppe une parabole ϖ' confocale à la précédente; la tangente au sommet s'obtiendra en menant une perpendiculaire à $\overline{\mu\mu'}$ en son milieu.

II. Supposons que le cercle Γ (*fig.* 2) prenne

Fig 2.



la position C, qui admet pour diamètre AA′; le triangle MM′P devient le triangle $\mu\mu'$F. Nous avons vu que la projection H de A′ sur MP est sur la droite μF, faisant avec $\mu\mu'$ l'angle α; de même la projection H′ du point A′ sur M′P décrit le côté μ'F. Mais, d'autre part, l'angle $\widehat{HFH'}$ est égal à l'angle $\widehat{HPH'}$ ou $180° - 2\alpha$; il en résulte que la circonférence décrite sur A′P comme diamètre passe par H, H′ et F. L'angle A′FP est droit et le lieu du point P est une droite d qu'il est facile de placer lorsqu'on a déterminé le point fixe F.

III. Inversement, si le point F est donné sur la droite d, en menant par ce point les tangentes $F\mu$, $F\mu'$ au cercle C, on en déduira sans ambiguïté la droite D et l'angle α.

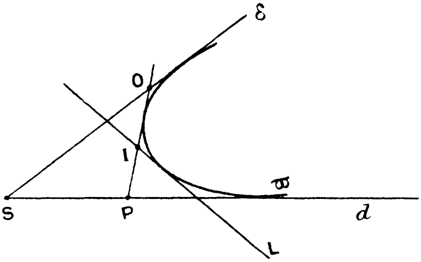
Pour qu'une droite d_1 donnée dans le plan puisse être envisagée comme lieu géométrique du pôle P par rapport à Δ, il faut et il suffit que le point F_1, obtenu en projetant le point A′, soit en dehors du cercle C; en d'autres termes la droite d_1 devra rencontrer la ligne indéfinie AA′ en un point qui soit en dehors du segment $\overline{AA'}$.

IV. Lorsque D tourne autour du point A, l'angle α restant constant, l'angle $\widehat{\mu F \mu'}$ reste fixe et le point F décrit une circonférence C′ concentrique au cercle C. La droite d se meut de manière que la projection orthogonale du point A′ décrive un cercle C′ extérieur à ce point; elle enveloppe une ellipse ayant les points A et A′ comme foyers.

V. Nous avons vu que les côtés et la hauteur $\overline{PQ}$ variable du triangle T enveloppaient quatre paraboles confocales; le centre O du cercle Γ est situé à l'intersection de PQ avec la perpendiculaire δ au milieu de AA′. Le cercle circonscrit au triangle T est décrit sur OP comme diamètre; il se déplace de manière que ce diamètre enveloppe une parabole ϖ' et que ses extrémités O et P décrivent respectivement deux droites δ et d.

Cette parabole ϖ' admet comme tangente au sommet la perpendiculaire KF à $\mu\mu'$; comme les projections du foyer A' sur d et δ sont situées sur cette droite, elle est inscrite dans l'angle formé par les droites respectivement lieux du pôle P et du centre O (*fig.* 3). Le point I

Fig. 3.



milieu de OP décrit une tangente IL à la parabole ϖ'; c'est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle T. Deux pareils cercles infiniment voisins se couperont en deux points sur une perpendiculaire à L et réciproquement sur toute normale à L existeront deux points de leur enveloppe; celle-ci est une conique admettant comme axe de symétrie la ligne L qu'il est facile de placer en prenant deux positions particulières du triangle T.