Nouvelles annales de mathématiques

S. Stamatiadis

Sur l'existence des racines de l'équation algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 484-491
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__484_0>

[A3aα]

SUR L'EXISTENCE DES RACINES DE L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. S. STAMATIADIS.

1. Soit le polynome

$$f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0.$$

En posant

$$A_n = a_n(\cos\omega_n + i\sin\omega_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_0 = a_0(\cos\omega_0 + i\sin\omega_0)$$

et

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

le polynome devient

$$f(z) = a_n r^n[\cos(\omega_n + n\varphi) + i\sin(\omega_n + n\varphi)] + \ldots$$
$$+ a_1 r[\cos(\omega_1 + \varphi) + i\sin(\omega_1 + \varphi)] + a_0(\cos\omega_0 + \sin\omega_0).$$

Les coordonnées du point M, qui représente sur le plan la valeur du polynome, sont

$$x = a_n r^n \cos(\omega_n + n\varphi) + \ldots + a_1 r\cos(\omega_1 + \varphi) + a_0\cos\omega_0,$$
$$y = a_n r^n \sin(\omega_n + n\varphi) + \ldots + a_1 r\sin(\omega_1 + \varphi) + a_0\sin\omega_0.$$

Considérons la courbe décrite par ce point, lorsque, r ayant une valeur constante, φ augmente de o à 2π, et soit θ l'accroissement que prend l'argument Θ du polynome sur cette courbe.

2. *Pour une valeur de r suffisamment petite, et pour toute valeur inférieure à elle, on a $\theta = 0$.*

En effet, le module du polynome

$$f(z) - A_0 = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z$$

peut devenir aussi petit que l'on veut. Prenons r assez petit pour avoir

$$|f(z) - A_0| < \mu < |A_0|,$$

pour toute valeur de φ, et écrivons un cercle de rayon μ avec le point A_0 pour centre; toute la courbe sera comprise dans ce cercle, qui ne comprend pas l'origine; par suite on aura $\theta = 0$.

3. *Pour une valeur de r suffisamment grande, et pour toute valeur supérieure, on a* $\theta = 2n\pi$.

1° Nous allons montrer d'abord que, pour une telle valeur de r, φ augmentant de 2π, *chacune des fonctions x et y s'annule $2n$ fois.*

En posant

$$\delta = \frac{a_{n-1} r^{n-1} \sin(\omega_{n-1} + \overline{n-1}\,\varphi) + \ldots + a_0 \sin \omega_0}{a_n r^n},$$

$$\varepsilon = \frac{a_{n-1} r^{n-1} \cos(\omega_{n-1} + \overline{n-1}\,\varphi) + \ldots + a_0 \cos \omega_0}{a_n r^n},$$

on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta}{\cos(\omega_n + n\varphi) + \varepsilon}.$$

On peut prendre r assez grand pour avoir

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} a_n r^n > a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0;$$

on aura alors, à plus forte raison,

$$|\delta| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pour toute valeur de φ.

Les valeurs de φ qui rendent $\sin(\omega_n + n\varphi)$ alternativement égal à $+1$ et à -1 sont distantes de $\frac{\pi}{n}$. A ces valeurs correspondent des valeurs de $\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta$ alternativement positives et négatives et, comme cette fonction est continue, elle s'annule chaque fois entre deux de ces valeurs consécutives. Par conséquent, φ augmentant de 2π, cette fonction s'annule bien $2n$ fois.

Elle ne s'annule que 2n fois. — En effet, soient φ_1, φ_2 deux valeurs consécutives de φ pour lesquelles $\sin(\omega_n + n\varphi)$ est respectivement égal à $+1$ et à -1.

Tant qu'on a

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta$ ne peut s'annuler, puisque $|\delta|$ est $< \frac{1}{\sqrt{2}}$; cela ne pourrait donc arriver que lorsque $\sin(\omega_n + n\varphi)$ varie de $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous allons montrer que, dans cet intervalle, $\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta$ a sa dérivée $n\cos(\omega_n + n\varphi) + \frac{d\delta}{d\varphi}$ constamment négative, d'où l'on déduira que cette fonction ne peut s'annuler plus d'une fois.

En effet, de

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on tire

$$|\cos(\omega_n + n\varphi)| > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$|n\cos(\omega_n + n\varphi)| > \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\left\{\begin{array}{c}(n-1)a_{n-1}r^{n-1}\cos(\omega_{n-1}+\overline{n-1}\,\varphi)\\ +(n-2)a_{n-2}r^{n-2}\cos(\omega_{n-2}+\overline{n-2}\,\varphi)+\ldots+a_1 r\cos(\omega_1+\varphi)\end{array}\right\}}{a_n r^n};$$

par conséquent

$$\left|\frac{d\delta}{d\varphi}\right| < \frac{(n-1)a_{n-1}r^{n-1}+(n-2)a_{n-2}r^{n-2}+\ldots+a_1 r}{a_n r}.$$

Or, l'inégalité (α) donne, *a fortiori*,

$$\frac{(n-1)a_{n-1}r^{n-1}+(n-2)a_{n-2}r^{n-2}+\ldots+a_1 r}{n a_n r^n} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\left|\frac{d\delta}{d\varphi}\right| < \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Donc la dérivée $n\cos(\omega_n+n\varphi)+\frac{d\delta}{d\varphi}$ a le signe de son premier terme; d'ailleurs ce premier terme est négatif; car, l'arc augmentant de φ_1 à φ_2, $\sin(\omega_n+n\varphi)$ décroît de $+1$ à -1, par conséquent $\cos(\omega_n+n\varphi)$ est négatif dans tout l'intervalle $\varphi_1\ldots\varphi_2$.

On conclut que, φ augmentant de 2π, la fonction $\sin(\omega_n+n\varphi)+\delta$, par conséquent aussi y, qui a toujours le même signe qu'elle, s'annule $2n$ fois et ne s'annule que $2n$ fois.

On démontrera la même chose pour x.

2° *Les zéros de x et de y alternent.* — Il s'agit de montrer que, entre deux zéros de x, il y a toujours un zéro de y, et inversement.

Soient φ_1, φ_2, φ_3 trois valeurs consécutives de φ qui rendent $\sin(\omega_n+n\varphi)$ respectivement égal à $+1$, -1, $+1$. Entre ces trois valeurs il y a deux valeurs φ', φ'' qui annulent la fonction $\sin(\omega_x+n\varphi)+\delta$, et qui font par conséquent

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| = |\delta|,$$

c'est-à-dire

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mais alors on a, pour les mêmes valeurs φ', φ'',

$$|\cos(\omega_n + n\varphi)| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donc aussi

$$|\cos(\omega_n + n\varphi)| > |\varepsilon|.$$

Donc, pour ces valeurs φ', φ'', la fonction

$$\cos(\omega_n + n\varphi) + \varepsilon$$

a le signe de son premier terme. D'ailleurs ce premier terme est négatif pour φ', positif pour φ''. Car dans l'intervalle $\varphi_1 \ldots \varphi_2$, qui comprend φ', l'arc croissant de φ_1 à φ_2, $\sin(\omega_n + n\varphi)$ décroît de $+1$ à -1, donc $\cos(\omega_n + n\varphi)$ est négatif; on voit de même qu'il est positif pour φ''. Donc $\cos(\omega_n + n\varphi) + \varepsilon$, par conséquent aussi x, prend, pour φ', φ'', deux valeurs de signe contraire, et, par suite, s'annule pour une valeur intermédiaire de φ.

On voit de même que, entre deux zéros de x, il y en a un de y; donc les zéros alternent.

3° On voit en outre que, *lorsque y arrive à zéro par des valeurs positives, x est négatif.* En effet, pour la valeur φ', y arrive à zéro par des valeurs positives, et l'on vient de voir que, pour cette valeur φ', x est négatif. On verra de même que, lorsque y arrive à zéro par des valeurs négatives, x est positif. Inversement, lorsque x est positif avant de s'annuler pour une certaine valeur de φ, y est positif pour cette valeur de φ et, si y est négatif, x est aussi négatif.

On conclut en somme que, φ augmentant de 2π, le point $M(x, y)$ rencontre les axes des coordonnées dans l'ordre suivant : la partie positive de l'axe des x, la partie positive de l'axe des y, la partie négative de l'axe des x, la partie négative de l'axe des y. Et, comme M rencontre chacun des axes $2n$ fois, on voit qu'il accomplit autour de l'origine n circonvolutions dans le sens positif; par conséquent :

Pour r assez grand, et pour toute valeur supérieure, on a $\theta = 2n\pi$.

4. Supposons que r, en partant de zéro, croît d'une manière continue, et considérons les valeurs correspondantes de θ.

Si entre deux valeurs r_1, r_2 de r il n'y a aucune racine du polynome, θ conserve dans cet intervalle une valeur constante.

On a, en effet,

$$\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

et

$$\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

ou bien

$$\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \sigma(\varphi, r)\, d\varphi,$$

en posant

$$\sigma(\varphi, r) = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

Considérons la fonction $\frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma(\varphi, r) = \frac{yx' - xy'}{x^2 + y^2}$. Comme on a par supposition $x^2+y^2 \neq 0$ pour toute valeur de φ dans l'intervalle $r_1 \ldots r_2$, et comme x, y, x', y' sont des fonctions continues de φ, la fonction est elle-même finie et continue dans cet intervalle; par conséquent l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma(\varphi, r)\,d\varphi$$

est fonction continue de sa limite φ. Or cette intégrale, à la constante près, n'est autre chose que $\sigma(\varphi, r)$; donc $\sigma(\varphi, r)$ est fonction continue de φ dans l'intervalle. Il s'ensuit que la valeur de l'intégrale θ est bien représentée par la différence

$$\theta = \sigma(2\pi, r) - \sigma(0, r),$$

dans le même intervalle. Or cette différence est constante; en effet, sa dérivée par rapport à r est

$$\left(\frac{x\dfrac{\partial y}{\partial r} - y\dfrac{\partial x}{\partial r}}{x^2+y^2}\right)_{2\pi} - \left(\frac{x\dfrac{\partial y}{\partial r} - y\dfrac{\partial x}{\partial r}}{x^2+y^2}\right)_0,$$

les indices signifiant la valeur qu'il faut donner à φ dans chaque parenthèse. Cette dérivée est égale à 0, car les dénominateurs sont constamment différents de 0, tandis que d'autre part chacune des fonctions x, y, $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ prend, pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, les mêmes valeurs.

5. *Si entre les valeurs r_1, r_2 il y a une racine du polynome, r augmentant de r_1 à r_2, l'angle θ augmente de 2π.*

Soit p la racine, le polynome s'écrit

$$f(z) = f_1(z)(z-p),$$

le polynome $f_1(z)$ n'ayant aucune racine entre r_1 et r_2. Donc, en appelant θ_1 l'accroissement que prend l'argument de ce polynome $f_1(z)$, lorsque φ croît de 2π, d'après le n° 4, θ_1 aura une valeur constante entre r_1 et r_2. Mais, d'autre part, l'accroissement de l'argument du binome $z - p$, r augmentant de r_1 à r_2, augmentera de 2π.

En effet, les valeurs de $z - p$, pour une valeur constante de r et pour $\varphi = 0, \ldots, 2\pi$, sont représentées par une circonférence décrite autour du point $-p$ avec un rayon égal à la valeur de r.

Comme on a, par supposition,

$$r_1 < |p| < r_2,$$

on voit que, pour $r = r_1$, cette circonférence ne comprend pas l'origine, tandis que pour $r = r_2$ elle comprend l'origine. Donc, pour r_1 l'accroissement de l'argument de $z - p$ est égal à 0, tandis que pour r_2 il est égal à 2π. D'ailleurs, l'argument de $f(z)$ étant égal à la somme des arguments de ces facteurs $f_1(z)$ et $(z - p)$, on conclut que θ augmente de 2π.

On démontrerait de même que, si entre r_1, r_2 il y a m racines du polynome, r variant de r_1 à r_2, θ augmente de $2m\pi$.

S'il y a des racines égales, on voit qu'elles compteront comme autant de racines distinctes.

Il est clair aussi que, inversement, si, r variant de r_1 à r_2, θ augmente de $2m\pi$, il y a m racines du polynome dans cet intervalle.

Des n^os 3 et 5 on conclut que le polynome a n racines.