Nouvelles annales de mathématiques

A. Deltour

Sur les polyèdres de genre un

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 481-483

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__481_0>

[K14b]

SUR LES POLYÈDRES DE GENRE *un*;

PAR M. A. DELTOUR.

1. Dans un article récemment inséré aux *Nouvelles Annales* [1], M. G. Fontené a signalé l'intérêt que présentaient, pour une extension possible à l'espace du théorème de Poncelet, les *polyèdres homogènes de genre* UN, c'est-à-dire ceux dont toutes les faces sont des polygones ayant un même nombre x de côtés, et dont tous les angles solides ont un même nombre y de faces.

Il ne saurait exister, *a priori*, que trois classes de polyèdres de genre *un* homogènes, pour lesquelles on a respectivement

$$x = 4, \quad y = 4,$$
$$x = 3, \quad y = 6,$$
$$x = 6, \quad y = 3.$$

On peut donner aux polyèdres de ces trois classes les noms respectifs de *polyèdres tétragonaux, polyèdres trigonaux, polyèdres hexagonaux,* et la question suivante se pose :

Existe-t-il, dans chaque classe, une infinité de polyèdres?

La réponse est affirmative en ce qui concerne les polyèdres tétragonaux, ainsi que l'a montré M. Fontené (*loc. cit.*). Quant aux polyèdres trigonaux et aux po-

[1] Même Tome, p. 433.

lyèdres hexagonaux, la question ne paraît pas avoir été traitée jusqu'ici, et le but de la présente Note est de combler cette lacune.

Je vais montrer que, *pour toute valeur de* $S \geqq 7$, *on peut construire au moins un polyèdre trigonal à* S *sommets*. Il en résultera immédiatement, par corrélation, que l'on peut construire, pour les mêmes valeurs de S, au moins un polyèdre hexagonal à S faces.

2. Soient donnés S points, dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan, et que je désignerai par les nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_S.$$

Considérons les deux triangles

$$a_1 a_2 a_4 \quad \text{et} \quad a_1 a_3 a_4,$$

et tous ceux que l'on peut en déduire par permutation circulaire des sommets.

Je forme ainsi 2S triangles (T) (S dans chaque catégorie). *Je dis que ce sont les* 2S *faces d'un polyèdre trigonal, ayant pour sommets les* S *points donnés.*

Pour le démontrer, il faut d'abord reconnaître que chaque côté d'un triangle (T) quelconque appartient à un second triangle (T) et à un seul.

Considérons, par exemple, le triangle quelconque de la première catégorie

$$a_h a_{h+1} a_{h+3}.$$

(Il est bien clair que, dans cette notation, un indice qui dépasse S doit être remplacé par cet indice diminué de S.)

Le côté $a_h a_{h+1}$ de ce triangle appartient au triangle

$$a_{h-2} a_h a_{h+1}$$

de la seconde catégorie et n'appartient à aucun autre triangle (T).

Le côté $a_h a_{h+3}$ du même triangle appartient au triangle

$$a_h a_{h+2} a_{h+3}$$

de la seconde catégorie et n'appartient à aucun autre triangle (T).

Enfin, le côté $a_{h+1} a_{h+3}$ appartient au triangle

$$a_{h+1} a_{h+3} a_{h+4}$$

de la seconde catégorie et n'appartient à aucun autre triangle (T).

On reconnaîtra de même que chaque côté d'un triangle de la seconde catégorie appartient à un triangle et à un seul de la première catégorie.

Il faut ensuite vérifier que chaque point a_h est sommet de six triangles, et que ces six triangles sont les faces d'un véritable angle hexaèdre (non décomposé en deux angles trièdres).

Or, on le voit immédiatement : les six triangles en question sont les suivants :

$$a_h a_{h+1} a_{h+3},\quad a_{h-1} a_h a_{h+2},\quad a_{h-3} a_{h-2} a_h \qquad (1^{\text{re}} \text{ catégorie})$$

et

$$a_h a_{h+2} a_{h+3},\quad a_{h-2} a_h a_{h+1},\quad a_{h-3} a_{h-1} a_h \qquad (2^{\text{e}} \text{ catégorie});$$

ils sont les faces de l'angle hexaèdre

$$a_h(a_{h+1} a_{h+3} a_{h+2} a_{h-1} a_{h-3} a_{h-2}).$$

C. Q. F. D.