

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 470-480

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_470_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1974.

(1903, p. 240.)

Posons d'une manière générale

$$y_k = (m+1)^k a_0 x^m + m^k a_1 x^{m-1} + (m-1)^k a_2 x^{m-2} + \dots + a_m,$$

k et m étant des entiers positifs; si l'équation $y_0 = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $y_k = 0$, quel que soit k, les deux équations ayant d'ailleurs le même nombre de racines positives. En outre, si $p > k$, toute racine $p^{\text{up}}^{\text{le}}$ de $y_0 = 0$ est racine $(p-k)^{\text{up}}^{\text{le}}$ de $y_k = 0$.

Par exemple, en partant de $y_0 = (x-1)^m$, on voit que, pour $k < m$,

$$\begin{aligned} (m+1)^k x^m - \frac{m}{1} m^k x^{m-1} \\ + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^k x^{m-2} - \dots + (-1)^m \\ = (x-1)^{m-k} f(x), \end{aligned}$$

f(x) ayant toutes ses racines réelles et positives.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. A. LAUREAUX.

On a visiblement

$$y_k = \frac{d}{dx} (x y_{k-1}).$$

Si l'équation $y_{k-1} = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $xy_{k-1} = 0$, et par suite, en vertu du théorème de Rolle, de l'équation $y_k = 0$. Or $y_0 = 0$ a, par hypothèse, toutes ses racines réelles. Donc, etc.

En second lieu, les nombres des racines positives des équations $y_0 = 0$ et $y_k = 0$ sont exactement donnés par les nombres de variations que présentent leurs premiers membres, puisque ces deux équations ont toutes leurs racines réelles, et ces nombres de variations sont évidemment identiques.

Enfin, l'identité signalée, au début, qui, développée, s'écrit

$$y_k = y_{k-1} + x \frac{dy_{k-1}}{dx},$$

montre qu'une racine multiple d'ordre α de $y_{k-1} = 0$ est racine multiple d'ordre $\alpha - 1$ de $y_k = 0$. Donc, etc.

Remarque. — La dernière proposition est en défaut si la racine multiple considérée est nulle. Ainsi, supposons que zéro soit racine multiple d'ordre p de $y_0 = 0$. On a

$$a_m = a_{m-1} = \dots = a_{m-p+1} = 0, \quad a_{m-p} \neq 0, \\ y_k = (m+1)^k a_0 x^m + \dots + (m-p+1)^k a_{m-p} x^p,$$

et zéro est racine p^{upl} de $y_k = 0$, quel que soit k .

Autre solution par M. LETIERCE.

1989.

(1904, p. 43.)

On donne les demi-diamètres conjugués OD, OD' d'une ellipse et les segments OG, OG₁ perpendiculaires et égaux à OD'. Démontrer que les bissectrices de l'angle GDG₁, limitées au diamètre OD', se projettent orthogonalement sur DG ou DG₁, suivant des segments respectivement égaux aux demi-axes de l'ellipse. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. P. P.

Soient J le point où la bissectrice intérieure de GDG₁ coupe OD', H et H₁ ses projections sur DG et DG₁. On a

$$JG = JG_1. \quad JH = JH_1.$$

(472)

Les triangles rectangles JGH, JG₁H₁ seront donc égaux et

$$GH = G_1H_1.$$

Donc

$$DH = DH_1 = \frac{DG + DG_1}{2}.$$

Or, d'après le théorème énoncé au même Tome (p. 7),

$$DG = a - b, \quad DG_1 = a + b.$$

Par suite

$$DH = DH_1 = a.$$

Même démonstration pour la bissectrice extérieure DJ'; seulement, ici, le segment DH'₁ étant dirigé dans le sens de DG₁, tandis que DH' est en sens contraire de DG, on a

$$DH' = DH'_1 = \frac{DG_1 - DG}{2} = b.$$

Autres solutions de MM. BARISIEN, TROIN et LEZ.

1990.

(1904, p. 48)

On considère une hypocycloïde à trois rebroussements qui varie de manière à avoir, avec un cercle donné, trois tangentes communes fixes. Ses deux courbes ont, en outre, trois tangentes communes variables. Quel est le lieu des sommets du triangle formé par ces trois dernières tangentes?
(R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit O le centre du cercle donné C, dont on supposera le rayon égal à l'unité. Une hypocycloïde à trois rebroussements H étant de la troisième classe, C et H ont bien six tangentes communes. Soient m_1, m_2, \dots, m_6 leurs points de contact avec C.

Appelons H' la polaire réciproque de H par rapport à C : H', qui coupe C aux points m_1, m_2, \dots, m_6 , est une courbe du troisième ordre, ayant en O un point double à tangentes isotropes.

Si l'on prend comme axes de coordonnées les droites isotropes issues du point O, le cercle C a pour équation

$$(1) \quad xy = 1,$$

et, la courbe H',

$$(2) \quad Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + xy = 0,$$

A, B, C, D étant des coefficients quelconques.

L'équation aux x des points d'intersection de C et de C' s'obtient par l'élimination de y entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$(3) \quad Ax^6 + Bx^4 + x^3 + Cx^2 + D = 0.$$

Les racines x_1, x_2, \dots, x_6 de cette équation sont les abscisses des points m_1, m_2, \dots, m_6 . Il est visible qu'elles satisfont aux relations

$$\sum x_i = 0, \quad \sum \frac{1}{x_i} = \sum y_i = 0.$$

Par conséquent le point O est le barycentre des points m_1, m_2, \dots, m_6 . Réciproquement, lorsque six points m_1, m_2, \dots, m_6 du cercle C sont tels que leur barycentre tombe au point O, leurs x sont racines d'une équation de la forme (3), et l'on peut trouver une courbe H' qui coupe C en ces six points.

Cela posé, supposons fixes les trois points m_1, m_2, m_3 , et soit g leur barycentre. Les points m_4, m_5, m_6 doivent alors varier sur C de telle manière que leur barycentre soit le point fixe g' défini par $Og' = -Og$. Les milieux des cordes m_4m_5, m_5m_6, m_6m_4 décrivent donc un cercle G' homothétique à C, le centre d'homothétie étant le point g' et le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{2}$. Le triangle formé par les tangentes à C aux points m_4, m_5, m_6 (triangle dont les sommets sont des points du lieu demandé) est par suite inscrit à un cercle fixe Γ' , inverse de G' par rapport à C.

Mais, de même, les milieux des cordes m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1 sont sur un cercle G, homothétique de C par rapport à g , le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{2}$, et les sommets du triangle formé par les tangentes à C aux points m_1, m_2, m_3 sont sur

un cercle Γ , inverse de G par rapport à C ; G et G' sont visiblement symétriques par rapport au point O ; il en est donc de même de Γ et de Γ' , et l'on peut énoncer le résultat final que voici :

Soient O le centre du cercle donné, Γ le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes fixes. Le lieu demandé est le cercle Γ' , symétrique de Γ par rapport au point O .

1991.

(1904, p. 96.)

Soient (S) et (S') deux surfaces réglées ayant la même ligne de striction C , et telles que les génératrices G et G' de (S) et de (S') qui se coupent en un point m de C fassent entre elles un angle constant. Toute droite G'' , qui passe par le point m et constitue avec G et G' un trièdre de grandeur invariable, engendre une surface (S'') dont la ligne de striction est aussi C .

(R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. EMIL RATH.

J'appliquerai la méthode de Grassmann à la solution de cette question et de la question suivante. J'emploie les notations de M. Burali-Forti (*Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann*. Paris, 1897).

Si U, U', U'' sont des vecteurs unités parallèles aux génératrices des trois surfaces, qui passent par la courbe donnée C . et T un vecteur unité parallèle à la tangente de la courbe C . on a

$$(1) \quad U^2 = U'^2 = U''^2 = T^2 = 1.$$

La courbe C est la ligne de striction des deux premières surfaces, on a donc

$$(2) \quad T \left| \frac{dU}{ds} = 0, \quad T \left| \frac{dU'}{ds} = 0,$$

s désignant l'arc de la courbe C . Les angles des vecteurs U, U', U'' sont constants; on a donc

$$(3) \quad U | U' = \text{const.}, \quad U' | U'' = \text{const.}, \quad U'' | U = \text{const.}$$

La dérivation des équations (1) et (3) donne

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = U \left| \frac{dU}{ds} = U' \left| \frac{dU'}{ds} = U'' \left| \frac{dU''}{ds}, \right. \\ 0 = U \left| \frac{dU'}{ds} + U' \left| \frac{dU}{ds} = U' \left| \frac{dU''}{ds} + U'' \left| \frac{dU'}{ds} \right. \\ \qquad \qquad \qquad = U'' \left| \frac{dU}{ds} + U \left| \frac{dU''}{ds}. \right. \end{array} \right.$$

Si nous posons

$$T = \alpha U + \alpha' U' + \alpha'' U'',$$

les α , α' , α'' désignant des nombres, nous avons, en vertu des relations (4) et (2) :

$$\begin{aligned} 0 &= T \left| \frac{dU}{ds} = \alpha' U' \left| \frac{dU}{ds} + \alpha'' U'' \left| \frac{dU}{ds}, \right. \\ 0 &= T \left| \frac{dU'}{ds} = \alpha U \left| \frac{dU'}{ds} + \alpha'' U'' \left| \frac{dU'}{ds}, \right. \\ T \left| \frac{dU''}{ds} &= \alpha U \left| \frac{dU''}{ds} + \alpha' U' \left| \frac{dU''}{ds} \right. \\ &= -\alpha U'' \left| \frac{dU}{ds} - \alpha' U'' \left| \frac{dU'}{ds} \right. \\ &= \frac{\alpha\alpha'}{\alpha''} \left(U' \left| \frac{dU}{ds} + U \left| \frac{dU'}{ds} \right) = 0. \end{aligned}$$

La dernière équation $T \left| \frac{dU''}{ds} = 0$ montre que la courbe C est la ligne de striction de la troisième surface.

1992.

[1904, p. 96 et 144 (1).]

On donne dans l'espace une courbe C.

1° Définir la surface réglée la plus générale dont C est la ligne de striction en même temps qu'une ligne de courbure.

2° Définir la surface réglée la plus générale dont C est la ligne de striction en même temps qu'une ligne asymptotique.

(R. BRICARD.)

(1) Les deux énoncés dont l'ensemble constitue la question 1992 ont été séparés par suite d'une erreur matérielle.

SOLUTION

Par M. EMIL RATH.

Considérons un point P de la courbe donnée C comme fonction de l'arc s . Si T, B, N sont trois vecteurs unités, parallèles à la tangente, la normale principale et la binormale de la courbe C au point P, on a

$$(1) \quad \begin{cases} T^2 = N^2 = B^2 = 1, & T | N = N | B = B | T = 0, \\ B = | TN, & T = | NB, & N = | BT, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho} N, \quad \frac{dN}{ds} = -\left(\frac{1}{\rho} T + \frac{1}{\tau} B\right), \quad \frac{dB}{ds} = \frac{1}{\tau} N$$

(formules de Frenet; $\frac{1}{\rho}$ est la courbure, $\frac{1}{\tau}$ la torsion).

Soit U un vecteur unité, encore indéterminé, tel que la surface réglée TU admette la courbe C pour ligne de striction; nous aurons

$$(3) \quad T \left| \frac{dU}{ds} = 0.$$

Si donc nous posons

$$(4) \quad U = xT + yN + zB,$$

où x, y, z sont des nombres fonctions de s telles que

$$(5) \quad U^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

les formules de Frenet donnent

$$(6) \quad \frac{dU}{ds} = \left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho}\right) T + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau}\right) N + \left(\frac{dz}{ds} - \frac{y}{\tau}\right) B.$$

En substituant la valeur de $\frac{dU}{ds}$ dans (3), nous avons, en vertu de (1),

$$(7) \quad \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} = 0.$$

1° Pour que la courbe donnée soit *asymptotique*, il faut et il suffit que le vecteur U soit parallèle au plan osculateur de la courbe, et par conséquent perpendiculaire à la binormale; on a donc

$$U | B = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0.$$

Si nous posons donc $x^2 = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, (7) donne

$$(8) \quad \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho} \right) = 0.$$

En supposant $\sin \varphi \neq 0$, nous avons

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho} = 0;$$

et, en intégrant

$$(9) \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{\rho},$$

φ_0 est la valeur de φ pour $s = 0$. La génératrice passant par le point P de la surface réglée cherchée est donc définie par le vecteur

$$(10) \quad \mathbf{U} = \cos \varphi \mathbf{F} + \sin \varphi \mathbf{N},$$

φ étant donné par la formule (9).

2° Pour que la courbe donnée C soit une *ligne de courbure*, il faut et il suffit que T soit parallèle à $\frac{d\mathbf{R}}{ds}$, R désignant un vecteur unité parallèle à la normale de la surface. Le plan tangent est parallèle au bivecteur UT; on a donc

$$\mathbf{R} = \frac{|\mathbf{UT}|}{\text{mod } \mathbf{UT}},$$

ou, en vertu de (4) et (1),

$$(11) \quad \sqrt{y^2 + z^2} \mathbf{R} = z\mathbf{N} - y\mathbf{B}.$$

En dérivant et en tenant compte des formules de Frenet, on

$$\sqrt{y^2 + z^2} \frac{d\mathbf{R}}{ds} = -\frac{z}{\rho} \mathbf{T} + \frac{y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} - \frac{y^2 + z^2}{\tau}}{y^2 + z^2} (y\mathbf{N} + z\mathbf{B}).$$

Pour que $\frac{d\mathbf{R}}{ds}$ soit parallèle à T, il faut que l'on ait

$$(12) \quad y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} - \frac{y^2 + z^2}{\tau} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d \frac{z}{y}}{1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2} = \frac{ds}{\tau}.$$

Si nous posons $\frac{ds}{\tau} = d\psi$ (angle de torsion), on a, en intégrant,

$$\text{arc tang } \frac{z}{y} = \psi + c.$$

La constante c est la valeur de $\text{arc tang } \frac{z}{y}$ pour $s = 0$ et $\psi = 0$. En substituant à $\psi + c$ la grandeur ψ' , on a

$$(13) \quad \frac{z}{y} = \text{tang } \psi'.$$

Des équations (5) et (7) on tire

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos \psi' ds}{\rho}, \quad \text{arc sin } x = \int_0^s \frac{ds \cos \psi'}{\rho} + c_1$$

(c_1 est la valeur de $\text{arc sin } x$ pour $s = 0$),

$$(14) \quad x = \sin \left(\int_0^s \frac{ds \cos \psi'}{\rho} + c_1 \right).$$

La surface cherchée est définie par la relation (4); les nombres x, y, z étant donnés par les équations (13) et (14).

1993.

(1904, p. 144)

Soient m et m' deux points d'une ellipse E . Sur la normale en m on porte, extérieurement à l'ellipse, une longueur mp , égale au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m . Soit p' le point analogue que l'on peut construire sur la normale en m' .

Démontrer que, si la tangente en m' contient le point p , la tangente en m contient le point p' .

(R. BRICARD.)

SOLUTION ANALYTIQUE

Par M. E.-N. BARIEN.

Si l'ellipse E a pour équation

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0,$$

et si φ et φ' sont les angles d'anomalie excentrique en m et m' , on sait que les points p et p' sont situés sur le cercle de Chasles

concentrique à E et de rayon $(a + b)$. Les coordonnées de p et p' sont

$$p \begin{cases} x = (a + b) \cos \varphi, \\ y = (a + b) \sin \varphi, \end{cases} \quad p' \begin{cases} x = (a + b) \cos \varphi', \\ y = (a + b) \sin \varphi'. \end{cases}$$

Les tangentes à E en m et m' ont pour équations

$$\begin{aligned} bx \cos \varphi + ay \sin \varphi &= ab, \\ bx \cos \varphi' + ay \sin \varphi' &= ab. \end{aligned}$$

On voit que la condition pour que la tangente en m' passe par p est la même que si la tangente en m passe par p' . Cette condition est

$$(a + b)(b \cos \varphi \cos \varphi' + a \sin \varphi \sin \varphi') = ab.$$

Remarques. — On a encore les propriétés suivantes :

I. *Le lieu du point de rencontre des tangentes en m et m' est l'ellipse*

$$b(2b + a)x^2 + a(2a + b)y^2 = ab(a + b)^2.$$

II. *Le lieu du point de rencontre des droites pp' et mm' est la kreuzcurve*

$$b^5(2a + b)x^2 + a^5(a + 2b)y^2 = c^4 x^2 y^2.$$

Soient p_1 le symétrique de p par rapport à m , p'_1 le symétrique de p' par rapport à m . On trouve encore :

III. *Le lieu du point de rencontre des droites pp' et $p_1p'_1$ est la kreuzcurve*

$$b^3(2a + b)x^2 + a^3(a + 2b)y^2 = (a + b)^2 x^2 y^2.$$

IV. *Le lieu du point de rencontre des droites $p_1p'_1$ et mm' est la kreuzcurve II.*

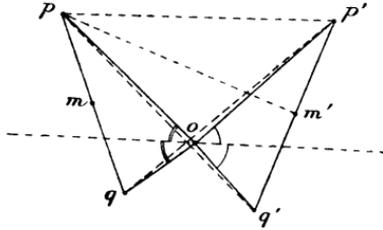
Autres solutions analytiques de M. D. TABAKOFF, de M. TROIN et de M. LEZ.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. THIÉ.

On sait que si l'on porte, sur la normale en m à une ellipse E, et de part et d'autre du point m , deux seg-

ments mp , mq , égaux tous deux au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m (le point p étant extérieur à l'ellipse), les points p et q se trouvent respectivement sur les cercles de Chasles, de rayons $a + b$ et $a - b$, a et b étant



les demi-axes de E. On sait aussi que op et oq sont également inclinées sur les axes de E.

Soient p' et q' les points analogues relatifs au point m' ; si le point p est sur la tangente à E en m' , on a

$$pp' = pq'.$$

Mais les deux triangles poq' , $p'oq$ sont égaux, comme ayant

$$op = op', \quad oq = oq', \quad \widehat{poq'} = \widehat{p'oq}.$$

Donc

$$pq' = p'q.$$

Il en résulte

$$pp' = p'q.$$

Par suite le point p' se trouve bien sur la tangente en m à E.

C. Q. F. D.