Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et calcul intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 467-470

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__467_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés, dans un plan* P, *un point fixe et une droite fixe* DD' :

1° *On demande de déterminer les courbes* C *du plan* P *telles que la distance* MQ *d'un point quelconque* M *de l'une de ces courbes à la droite fixe* DD' *soit égale à la distance* OR *du point fixe* O *à la tangente en* M *à la courbe* C.

2° *Par un point* A *du plan* P *il passe en général deux courbes de cette espèce, tangentes en ce point* A *à deux droites distinctes* At, At'. *Trouver le lieu géométrique des points* A *pour lesquels ces deux droites* At, At' *sont confondues et étudier la forme des courbes* C *correspondantes dans le voisinage du point* A.

N. B. — *On prendra pour origine le point* O, *l'axe* Oy *étant parallèle à la droite* DD'.

II. *Démontrer que l'équation différentielle linéaire*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x + \mu + \gamma)\frac{dy}{dx} + \mu y = 0,$$

où μ *et* γ *sont deux nombres entiers positifs, admet pour intégrale un polynome* $y = \mathrm{P}(x)$. *En déduire qu'elle admet une seconde intégrale de la forme*

$$y = e^x\,\mathrm{Q}(x),$$

$\mathrm{Q}(x)$ *étant aussi un polynome.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int \frac{[x\log(x^2+y^2) - x^2y^2]\,dx + [y\log(x^2+y^2) + x^3]\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

prise le long du chemin AMNP, *joignant le point* A, *de coordonnées* $x = 1$, $y = 0$, *au point* P *de coordonnées* X, Y *en contournant une fois l'origine, le point* P *étant situé dans l'angle* xOy. (Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — I. *Étant donné, dans un plan* P, *un axe* Ox, *on demande de déterminer dans ce plan une courbe* C, *passant par le point* O, *telle que l'aire engendrée par la rotation d'un arc* OM *de cette courbe autour de* Ox *soit dans un rapport constant avec l'aire engendrée par la rotation de la tangente* MT *autour du même axe. Examiner en particulier le cas où* $k = \frac{4}{3}$.

II. *Trouver la valeur finale de la fonction*

$$u = \operatorname{arc\,tang}\sqrt{1 - z}$$

de la variable complexe z, lorsque cette variable décrit le segment de ligne droite allant du point $z = 0$ au point $z = 1 + \sqrt{-1}$, la valeur initiale de u étant égale à $\frac{\pi}{4}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}.$$

(Octobre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On demande l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2+y^2).$$

Soit S *la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant une intégrale de l'équation* (1). *Déterminer la fonction arbitraire qui figure dans cette intégrale, de façon que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface* S *et trouver la seconde famille de lignes asymptotiques.*

Les surfaces Σ ainsi obtenues dépendent d'une constante arbitraire. Trouver l'équation générale des surfaces qui les coupent orthogonalement.

II. *On considère la fonction de deux variables complexes*

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x^2+y^2+3}.$$

Soient x_0, y_0 deux nombres RÉELS *quelconques. On demande de trouver une limite supérieure du module de $f(x, y)$ lorsque les variables x et y restent comprises respectivement à l'intérieur de deux cercles* C *et* C′ *de rayon égal à* 1 *décrits des points x_0 et y_0 pour centres, dans le plan de chacune de ces variables.*

Quelles conclusions peut-on déduire de ce calcul, relativement aux intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x^2+y^2+3}$$

qui sont réelles pour des valeurs réelles de la variable?

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Juillet 1904.)