J. LE ROUX

Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 448-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__448_0>

[D1d, D3d]

LES FONCTIONS D'UNE INFINITÉ DE VARIABLES INDÉPENDANTES;

Par M. J. LE ROUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. Il existe des expressions dépendant d'une infinité d'éléments et dont les propriétés sont familières à tous les mathématiciens : séries, produits, déterminants infinis, etc. Mais on peut être amené aussi à considérer d'autres expressions où des éléments en nombre infini figurent sous une forme beaucoup plus compliquée, et à étudier la manière dont elles se comportent lorsqu'on fait varier les éléments considérés. Telles sont par exemple les intégrales des équations aux dérivées partielles, regardées comme des fonctions des constantes initiales [1]. On a ainsi de véritables fonctions d'une infinité de variables indépendantes. Celles qui se présentent dans les applications jouissent de propriétés extrêmement simples, constituant une extension naturelle des propriétés des fonctions de plusieurs variables.

2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite infinie dé-

[1] Dans un Mémoire paru récemment au *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* j'ai exposé les fondements de cette théorie et j'en ai fait l'application aux équations aux dérivées partielles. *Voir* aussi, dans les *Travaux scientifiques de l'Université de Rennes :* Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes (1902); Intégration d'une équation aux dérivées partielles à une infinité de variables indépendantes (1903).

nombrable de variables indépendantes, et

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

une fonction de ces variables.

Dans ce qui suit nous n'aurons pas en vue le domaine *complet* d'existence de la fonction considérée, mais seulement un domaine *restreint* où la fonction existe certainement et où l'on peut la soumettre à des opérations déterminées. Dans le cas des variables réelles nous supposerons le domaine défini par des inégalités de la forme suivante :

$$a_n < x_n < b_n,$$

a_n et b_n étant des nombres fixes, indépendants des valeurs attribuées aux variables autres que x_n. La limite inférieure des différences $b_n - a_n$ peut être égale à zéro ; c'est-à-dire que, étant donné un nombre positif ε, arbitrairement petit, il existe toujours une infinité de différences $b_n - a_n$, différentes de zéro, et satisfaisant à l'inégalité

$$|b_n - a_n| < \varepsilon.$$

Nous dirons alors que le domaine est *évanouissant*. Tel est, par exemple, le domaine de convergence de la série

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots.$$

Un changement de variables, défini par la formule

$$y_n = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n},$$

remplace un domaine évanouissant par un domaine non évanouissant. On peut évidemment, s'il y a lieu, appliquer cette transformation à une partie seulement des variables.

Pour les variables complexes nous supposerons de même que le domaine restreint est défini en assujettissant chaque variable x_n à rester à l'intérieur d'un contour simple *fixe* C_n, limitant une aire non nulle A_n. Soit ρ_n la limite supérieure des rayons des cercles intérieurs à C_n. Si la limite inférieure des nombres ρ_n est égale à zéro, quand n croît indéfiniment, nous dirons encore que le domaine est évanouissant. Il est toujours possible, par un changement de variables analogue à celui que nous avons considéré plus haut, de rendre un domaine non évanouissant. Dans certaines questions on peut être amené à considérer un domaine mixte dans lequel les variables se classent en deux catégories, les unes sont réelles (ou représentées par des points d'une courbe), les autres complexes (variant dans une aire).

3. Je regarde tout système de valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ comme les coordonnées d'un point, que j'appelle le point x. Une fonction

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

est définie dans un domaine D, si à tout point x de ce domaine correspond pour la fonction une valeur bien déterminée.

Une fonction $f(x)$ définie dans un *domaine non évanouissant* est continue, si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre η, tel que les inégalités

$$|h_i| < \eta$$

entraînent

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

On a posé

$$f(x+h) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n, \ldots).$$

4. Il y a lieu maintenant d'introduire une notion nouvelle : celle de *fonction convergente*. Soient

$$x^0 \qquad (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$$

et

$$x^0 + h \qquad (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h^n, \ldots)$$

deux points quelconques d'un domaine restreint D. Désignons par $f_m(x^0 + h, x^0)$ ce que devient $f(x^0 + h)$ quand on y néglige les accroissements $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots$ des variables d'indice supérieur à m :

$$(1) \quad \begin{cases} f_m(x^0 + h, x^0) \\ \quad = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, x_3^0 + h_3, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m-1}^0, x_{m+2}^0, \ldots). \end{cases}$$

Je dis que *la fonction* $f(x)$ *est convergente dans le domaine* D *si la différence*

$$f(x^0 + h) - f_m(x^0 + h, x^0)$$

tend vers zéro quand m croît indéfiniment.

On peut alors faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre μ, tel que l'inégalité

$$(2) \qquad m > \mu$$

entraîne la suivante :

$$(3) \qquad |f(x^0 + h) - f_m(x^0 + h, x_0)| < \varepsilon.$$

Le nombre μ devra dépendre en général des h. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est uniformément convergente dans le domaine D, si le nombre μ peut être choisi indépendamment des h, de manière que l'inégalité (3) soit une conséquence de (2), sous la seule condition que le point $x^0 + h$ appartienne, comme x^0, au domaine considéré. Dans ces conditions la limite μ peut être aussi regardée, jusqu'à un certain point, comme indépendante de x^0. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
& f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_m^0+h_m, x_{m+1}^0+h_{m+1}, \ldots) \\
& \quad - f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_m^0+h_m, x_{m+1}^0+k_{m+1}, x_{m+2}^0+k_{m+2}, \ldots) \\
& = [f(x^0+h) - f_m(x^0+h, x^0)] \\
& \quad - [f(x_1^0+h_1, \ldots, x_m^0+h_m, x_{m+1}^0+k_{m+1}, \ldots) - f_m(x^0+h. x^0)].
\end{aligned}
\right.
$$

La notion de fonction convergente ne présente rien d'artificiel. Les intégrales des équations aux dérivées partielles sont, dans de certaines limites, des fonctions convergentes des constantes initiales qui servent à les déterminer.

Une fonction peut évidemment être convergente, et même uniformément convergente, sans être continue; de même elle peut être définie et continue sans être convergente; on en a un exemple très simple en considérant le prolongement d'une série de Taylor en dehors de son cercle de convergence. Considérons l'ensemble des fonctions $f(z)$ analytiques à l'intérieur d'une aire simple C entourant l'origine. Chaque fonction de l'ensemble est définie par les valeurs qu'elle prend, ainsi que la suite de ses dérivées pour $z = 0$. Désignons par $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ces valeurs. Pour tout point α intérieur au cercle de convergence, on a

$$f(\alpha) = x_0 + \frac{\alpha}{1} x_1 + \frac{\alpha^2}{1.2} x_2 + \ldots.$$

Je désigne cette valeur par

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \varphi(x).$$

Quand le point α est extérieur au cercle de convergence, mais intérieur à l'aire C, la fonction $\varphi(x)$ est encore déterminée, mais elle n'est plus convergente.

On a, en effet,

$$\varphi_m(x, 0) = x_0 + \frac{\alpha}{1} x_1 + \frac{\alpha^2}{1.2} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_m}{m!} x_m,$$

et cette expression n'a plus pour limite $\varphi(x)$ quand m croît indéfiniment.

5. Toute fonction convergente peut être représentée par une série convergente : telle est, en effet, la série dont le terme général u_n est de la forme

$$u_n = f_n(x, x^0) - f_{n-1}(x, x^0),$$

où l'on regarde les x^0 comme des valeurs numériques fixes. Si la fonction $f(x)$ est uniformément convergente dans le domaine D la série considérée l'est aussi. Cette série jouit en outre de la propriété que chacun de ses termes de rang fini ne contient qu'un nombre limité de variables, le nombre de ces variables croissant indéfiniment avec le rang du terme : c'est ce que j'appelle une *série normale*.

Toute série normale uniformément convergente dans un domaine D définit une fonction uniformément convergente dans ce domaine.

6. La théorie des limites s'applique sans modification aux fonctions convergentes et uniformément convergentes.

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions convergentes est une fonction convergente.

Le quotient de deux fonctions convergentes est une fonction convergente, pourvu que le dénominateur soit différent de zéro dans le domaine considéré.

On peut même concevoir des séries dont les termes soient des fonctions d'une infinité de variables. Je me contente d'énoncer les théorèmes suivants dont la démonstration ne présente aucune difficulté :

I. *Une série dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes dans un domaine* D *et qui est elle-même uniformément convergente dans* D *représente dans ce domaine une fonction uniformément convergente.*

II. *Une série uniformément convergente dans un domaine* D, *et dont les termes sont des fonctions continues dans ce domaine, y représente une fonction continue.*

7. Supposons maintenant que la fonction désignée par $f_m(x, x_0)$ soit *une fonction analytique* des m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, quelque grand que soit m, le domaine étant un domaine restreint de variables complexes. Nous dirons alors que la fonction $f(x)$ est elle-même *une fonction analytique.*

Il est facile d'étendre aux *fonctions analytiques uniformément convergentes* la formule de Taylor. En effet, la fonction $f(x)$ étant uniformément convergente peut être représentée par une série normale uniformément convergente, dont chaque terme est une fonction analytique des variables, dont il dépend

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots.$$

Posons

$$x_n = x_n^0 + h_n,$$

et supposons les x_n^0 et les h_n tels que les points $x_n^0 + th_n$ restent intérieurs au domaine D lorsque t prend toutes les valeurs possibles de module inférieur ou égal à *un.*

Les termes de la série

$$f(x_n^0 + ht) = \Sigma\, u_n(x^0 + ht)$$

sont des fonctions analytiques de t, et la série est uniformément convergente dans une aire qui renferme en entier le cercle de rayon *un*. Donc la fonction $f(x^0 + ht)$ est développable suivant les puissances croissantes de t en une série qui reste convergente pour $t = 1$.

Dans le développement, le coefficient de t^n est égal à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x_0 + ht)}{t^{n+1}}$$

évaluée suivant la circonférence de rayon *un*, ayant pour centre l'origine, ou suivant tout autre contour équivalent; nous allons faire voir d'abord que ce coefficient est égal à la limite, pour m infini, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_m(x^0 + ht, x^0)}{t^{n+1}}.$$

Considérons, en effet, l'intégrale

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x^0 + ht) - f_m(x^0 + ht, x^0)}{t^{n+1}}.$$

La fonction $f(x)$ étant uniformément convergente, on peut déterminer un nombre m' tel que, pour $m > m'$, on ait

$$|f(x^0 + ht) - f_m(x^0 + ht, x^0)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

D'autre part, sur le contour d'intégration, le module de t est égal à *un*, et la longueur du contour est égale à 2π.

Donc le module de l'intégrale (5) est, dans les conditions énoncées, inférieur à ε, ce qui démontre notre proposition.

La fonction $f_m(x^0 + ht, x^0)$ ne dépend que d'un

nombre limité m de variables; on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_m(x^0+ht, x^0)}{t^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{n!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1^0} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2^0} + \ldots + h_m\frac{\partial}{\partial x_m^0}\right)^n f(x_1^0, x_2^0, \ldots).$$

Nous en déduisons les deux propositions suivantes :

1° *Dans les conditions que nous avons considérées, les polynomes homogènes en h*

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1^0} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2^0} + \ldots + h_m\frac{\partial}{\partial x_m^0}\right)^n f(x^0)$$

admettent pour limites des fonctions uniformément convergentes des h, quand m croît indéfiniment.

En particulier, la série

$$h_1\frac{\partial f}{\partial x_1^0} + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2^0} + \ldots + h_m\frac{\partial f}{\partial x_m^0} + \ldots$$

est uniformément convergente.

2° *La fonction analytique $f(x^0+h)$ est développable en série de Taylor, par la formule*

$$f(x^0+h) = U_0(x^0) + \frac{1}{1}U_1(h, x^0) + \frac{1}{1.2}U_2(h, x^0) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}U_n(h, x^0) + \ldots,$$

le terme $U_n(h, x^0)$ étant défini par la formule

$$U_n(h, x^0) = \left(\sum_{i=0}^{i=\infty} h_i\frac{\partial}{\partial x_i^0}\right)^n f(x^0).$$

Comme application de la première proposition, considérons un produit infini

$$P = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_m)\ldots,$$

et supposons-le uniformément convergent dans le domaine défini par les inégalités

$$|x_i| < \rho_i.$$

En faisant alors $x_i^0 = 0$, on trouve que la série

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m + \ldots$$

doit être uniformément convergente dans le domaine

$$|h_i| < \rho_i.$$

Cette propriété est d'ailleurs bien connue; il était néanmoins intéressant de la rattacher à notre théorie générale.

8. Le module de la différence

$$f(x) - f_m(x, x^0)$$

reste inférieur à un nombre positif ε_m qui tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Prenons la dérivée de cette différence par rapport à l'une des variables x_i. Si nous supposons que la variable x_i soit représentée, dans son plan, par un point situé à une distance égale ou supérieure à δ_i du contour de l'aire A_i, nous avons

$$(6) \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f_m(x, x^0)}{\partial x_i} \right| \leqq \frac{\varepsilon_m}{\delta_i}.$$

Cette égalité fondamentale prend deux formes différentes suivant que i est inférieur ou supérieur à m.

Soit d'abord $i \leqq m$; $f_m(x, x^0)$ dépend alors de la variable x_i et l'inégalité (6) exprime que *les dérivées d'une fonction analytique uniformément convergente sont elles-mêmes des fonctions analytiques uniformément convergentes.*

Soit ensuite $i > m$; la fonction $f_m(x, x^0)$ ne contient plus la variable x_i; l'inégalité (6) se réduit alors à la suivante

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_{m+\alpha}}\right| \leqq \frac{\varepsilon_m}{\delta_{m+\alpha}},$$

en posant $i = m + \alpha$. On a ainsi une limite supérieure de la dérivée. Pour les dérivées d'ordre supérieur il existe évidemment des limites semblables. On a en général

$$\operatorname{mod} \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_r} f(x)}{\partial x_{m+\alpha_1}^{p_1}\, \partial x_{m+\alpha_2}^{p_2} \ldots \partial x_{m+\alpha_r}^{p_r}} \leqq \frac{p_1!\, p_2! \ldots p_r!\, \varepsilon_m}{\delta_{m+\alpha_1}^{p_1}\, \delta_{m+\alpha_2}^{p_2} \ldots \delta_{m+\alpha_r}^{p_r}},$$

les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ étant supposés positifs.

Dans l'établissement de ces inégalités on ne suppose d'ailleurs pas nécessairement que la fonction $f(x)$ dépende d'une infinité de variables. Elles pourraient s'appliquer à certains problèmes, qui se présentent dans les applications, où figurent des fonctions dépendant d'un nombre très élevé de variables, ces variables ayant d'ailleurs des influences très inégales sur la variation des fonctions. On est conduit alors à remplacer les fonctions considérées par des fonctions approchées dans lesquelles certaines variables sont remplacées par des constantes.