# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 4 (1904), p. 420-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__420_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

N. D. L. R. — Nous prions les auteurs de solutions de questions proposées de vouloir bien se conformer, dans leurs rédactions, aux dispositions adoptées dans le Journal (indications du numéro de la question, de l'année et de la page où figurait l'énoncé; reproduction de cet énoncé; nom de l'auteur de la question).

Nous leur recommandons aussi de n'écrire que d'un seul côté de la page.

## 1971.

(1903, p. 192.)

*Soient* R *le rayon de courbure d'une courbe,* $R_1$ *celui de la représentation sphérique des tangentes,* T *le rayon de torsion,* $\rho$ *le rayon de la sphère osculatrice,* $s$ *l'arc de la courbe donnée; démontrer les relations*

$$(1) \qquad \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right)^2,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{R^2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{T}\right)^2 = 1$$

*et dire ce que devient la relation* (2) *dans l'hypothèse*

$$\rho = \text{const.}, \qquad T = \text{const.}$$

(SOLON CHASSIOTIS.)

### SOLUTION

Par M. SOLON CHASSIOTIS.

Soient

$$(C) \qquad x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s)$$

les coordonnées rectangulaires d'une courbe rapportée à son arc $s$. Les expressions

$$(C') \qquad \alpha = f'_1(s), \qquad \beta = f'_2(s), \qquad \gamma = f'_3(s)$$

sont alors les cosinus directeurs de la tangente en un point, ou bien les coordonnées rectangulaires de la représentation (C') sphérique de la courbe donnée C. On a d'ailleurs la condition

$$(1) \qquad f_1'^2(s) + f_2'^2(s) + f_3'^2(s) = 1.$$

Les rayons R et $R_1$ de courbure de C et de C' sont respectivement

$$(2) \qquad \frac{1}{R^2} = f_1''^2(s) + f_2''^2(s) + f_3''^2(s),$$

$$(3) \qquad \frac{1}{R_1^2} = f_1'''^2(s) + f_2'''^2(s) + f_3'''^2(s),$$

et à cause de (2) on a

$$(4)\qquad -\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}=f_1''f_1'''+f_2''f_2'''+f_3''f_3'''.$$

Or, les formules de Frenet donnent la relation

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}=S\left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2,$$

T étant le rayon de torsion, et comme

$$\alpha'=R\frac{d\alpha}{ds},\qquad \beta'=R\frac{d\beta}{ds},\qquad \gamma'=R\frac{d\gamma}{ds},$$

c'est-à-dire

$$\alpha'=Rf_1''(s),\qquad \beta'=Rf_2''(s),\qquad \gamma'=Rf_3''(s),$$

il vient

$$\frac{d\alpha'}{ds}=Rf_1'''+f''\frac{dR}{ds},\qquad \ldots,$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}=\left(\frac{R}{R_1}\right)^2-\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right)^2;$$

c'est la première des formules.

Pour arriver à l'autre, considérons le rayon $\rho$ de la sphère osculatrice; on a

$$(6)\qquad \rho^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2,$$

d'où, en éliminant $\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}$ entre (5) et (6), on arrive à la relation très simple

$$(7)\qquad \left(\frac{R^2}{R_1}\right)^2-\left(\frac{\rho}{T}\right)^2=1,$$

facile à retenir.

*Remarque.* — Les formules (5) et (7) sont évidemment indépendantes du choix de la variable, elles sont donc applicables à *tous* les cas.

L'avantage de la formule (5) est que, une fois R et R' calculés pour une courbe donnée, elle fait connaître $T^2$.

*Exemples.* — 1° Soit une *hélice circulaire*. On trouve, en calculant R,

$$R = a.$$

Quant à $R_1$ il est aussi constant, car la représentation sphérique d'une hélice est un cercle. On a donc

$$R_1 = b \qquad \text{et} \qquad \frac{dR}{ds} = 0;$$

on déduit

$$T = \frac{ab}{\sqrt{a^4 - 1}} = \text{const.},$$

résultat connu.

Ainsi :

*Les courbes dont le rayon de courbure est constant et qui ont comme représentation sphérique de leurs tangentes un cercle sont des hélices circulaires.*

Quant à la formule (7), elle fait connaître $\rho$; mais à cause de (6) on a

$$\rho = R.$$

En sorte que, en tout point d'une hélice,

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2,$$

où toutes les lettres sont des constantes.

2° Prenons les courbes $T = a$, $\rho = b$. On tire de (7)

$$R^2 = KR_1,$$

et de (5)

$$mR + \sqrt{1 + m^2 R^2} = ps, \tag{8}$$

$m$ et $p$ étant des constantes dépendant de $a$ et de $b$.

Ces courbes sont tracées sur une surface-canal engendrée par une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une courbe à torsion constante. Elles coupent à angle droit les cercles de la surface et de plus sont des géodésiques pour cette dernière. Comme on a $T = a$, l'équation (8) définit la courbe en coordonnées intrinsèques.

## 1977.

(1903, p. 431.)

*On donne dans un plan cinq droites $a$, $b$, $c$, $d$, $d'$ et deux points $D_1$, $A_2$ sur une droite qui passe par le point d'intersection $D$ des droites $d$ et $d'$.*

*On projette du point $D_1$ les points $(bc)$, $(ca)$, $(ab)$ [1] sur la droite $d$ et du point $A_2$ les mêmes points sur la droite $d'$. Soit $a'$ la droite qui joint les deux projections du point $(bc)$; soient de même $b'$ et $c'$, ....*

*Les huit droites $a$, $b$, $c$, $d$, $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ forment une configuration jouissant des propriétés suivantes, dont on demande la démonstration :*

1° *On peut former huit groupes de six droites, les droites d'un même groupe passant par un même point, et cela conformément au Tableau suivant :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(ab)(c'd')$ | $(bc)(a'd')$ | $(ca)(b'd')$ | *passent par un même point* $A_2$ |
| $(a'b')(cd)$ | $(b'c')(ad)$ | $(c'a')(bd)$ | |
| $(ab)(cd)$ | $(bc')(a'd)$ | $(c'a)(b'd)$ | » $B_2$ |
| $(a'b')(c'd')$ | $(b'c)(ad')$ | $(ca')(bd')$ | |
| $(ab')(c'd)$ | $(b'c)(a'd)$ | $(ca)(bd)$ | » $C_2$ |
| $(a'b)(cd')$ | $(bc')(ad')$ | $(c'a')(b'd')$ | |
| $(ab')(cd')$ | $(b'c')(a'd')$ | $(c'a)(bd')$ | » $D_2$ |
| $(a'b)(c'd)$ | $(bc)(ad)$ | $(ca')(b'd)$ | |
| $(ab')(cd)$ | $(b'c')(a'd)$ | $(c'a)(bd)$ | » $A_1$ |
| $(a'b)(c'd')$ | $(bc)(ad')$ | $(ca')(b'd')$ | |
| $(a'b)(cd)$ | $(bc')(ad)$ | $(c'a')(b'd)$ | » $B_1$ |
| $(ab')(c'd')$ | $(b'c)(a'd')$ | $(ca)(bd')$ | |
| $(ab)(cd')$ | $(bc')(a'd')$ | $(c'a)(b'd')$ | » $C_1$ |
| $(a'b')(c'd)$ | $(b'c)(ad)$ | $(ca')(bd)$ | |
| $(ab)(c'd)$ | $(bc)(a'd)$ | $(ca)(b'd)$ | » $D_1$ |
| $(a'b')(cd')$ | $(b'c')(ad')$ | $(c'a')(bd')$ | |

[1] $(bc)$ est le point d'intersection des droites $b$ et $c$.

2° *Désignons respectivement par* A, B, C, D *les points* $(aa')$, $(bb')$, $(cc')$, $(dd')$. *Les trois points appartenant à l'un quelconque des seize groupes*

$$\begin{array}{llll} AA_1A_2, & AB_1B_2, & AC_1C_2, & AD_1D_2, \\ BB_1A_2, & BA_1B_2, & BD_1C_2, & BC_1D_2, \\ CC_1A_2, & CD_1B_2, & CA_1C_2, & CB_1D_2, \\ DD_1A_2, & DC_1B_2, & DB_1C_2, & DA_1D_2 \end{array}$$

*sont sur une même droite.* (L. Klug.)

SOLUTION

Par M. L. Klug.

1° On connaît le théorème suivant :

*Si un triangle est circonscrit à un autre, on peut lui circonscrire une infinité de triangles circonscrits au second.*

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

*Soient* $l'm'n'$ *et* $l''m''n''$ *deux triangles inscrits au triangle* $lmn$ (*les points* $l'$, $l''$ *sont sur le côté* $mn$, *etc.*); *soient* $l_1$, $m_1$, $n_1$ *les points où se coupent respectivement* $m'n'$, $m''n''$; $n'l'$, $n''l''$; $l'm'$, $l''m''$. *Si la droite* $m_1n_1$ *passe par le point* $l$, *les droites* $n_1l_1$ *et* $l_1m_1$ *passent respectivement par les points* $m$ *et* $n$.

Dans la figure considérée, les deux triangles

$$(b'd)(ac)(b'd'), \quad (a'd)(bc)(a'd')$$

sont inscrits au triangle $dcd'$; les deux côtés $(b'd)(ac)$ et $(a'd)(bc)$ passent par le point $D_1$; les deux côtés $(ac)(b'd')$, $(bc)(a'd')$ passent par le point $A_2$, et les trois points $D_1$, $A_2$, $(dd')$ ou D sont en ligne droite; par conséquent le point d'intersection $(a'b')$ des côtés $(b'd)(b'd')$ ou $b'$ et $(a'd')(a'd)$ ou $a'$ est sur la droite $D_1(cd')$ et aussi sur la droite $A_2(cd')$.

Il en résulte que, si l'on projette le point $(a'b')$ du point $D_1$ sur $d'$, et du point $A_2$ sur $d$, la droite qui joint ces deux projections n'est autre que $c$.

De même, si l'on projette les points $(b'c')$, $(c'a')$ du point $D_1$

sur $d'$ et du point $A_2$ sur $d$, les droites qui joignent les deux projections d'un même point sont respectivement $a$ et $b$.

Pour démontrer que les droites

$$(ab)(cd),\quad (bc')(a'd),\quad (c'a)(b'd),$$
$$(a'b')(c'd'),\quad (b'c)(ad'),\quad (ca')(bd')$$

passent par le point $B_2$, remarquons que les côtés des triangles $abc'$, $a'b'c$ déterminent une involution sur la droite $d$. Par conséquent, la droite $(c'a)(b'd)$ passe par le point d'intersection $B_2$ des droites $(ab)(cd)$, $(a'd)(bc')$. Les mêmes triangles déterminent une involution sur la droite $d'$; par conséquent, la droite $(c'a)(b'd')$ contient le point d'intersection $C_1$ des droites $(ab)(cd')$, $(bc')(a'd')$. On démontrera de même tous les résultats énoncés dans la première partie.

2° Démontrons par exemple que les trois points D, $B_2$, $C_1$ sont en ligne droite; à cet effet considérons les deux triangles

$$(ab)(cd)(cd'),\quad (bc')(a'd)(a'd')$$

qui sont inscrits au triangle $dd'b$.

Les côtés $(ab)(cd)$ et $(bc')(a'd)$ passent par le point $B_2$.

Les côtés $(ab)(cd')$ et $(bc')(a'd')$ passent par le point $C_1$.

Les côtés $(cd)(cd')$ et $(a'd)(a'd')$ passent par le point $ca'$.

La droite $B_2(ca')$ passe par le sommet $(bd')$ du triangle $dd'b$; la droite $C_1(ca')$ passe par le sommet $(bd)$ du même triangle; donc la droite $B_2C_1$ passe par le point $(dd')$ ou D.

C. Q. F. D.

## 1980.

(1903, p. 432.)

*Déterminer, de la manière la plus générale, une courbe (plane ou gauche) telle que toutes ses conchoïdes par rapport à un point de l'espace convenablement choisi soient des courbes sphériques.* (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Soient

C une courbe jouissant de la propriété énoncée;

O un point par rapport auquel toutes les conchoïdes de C sont des courbes sphériques;

$m$ et $n$ deux points quelconques de C.

Si, quels que soient les points $m$ et $n$, on a $Om = On$, la courbe C est tracée sur une sphère de centre O, et fournit une solution évidente du problème. Dans le cas contraire, on peut choisir les points $m$ et $n$ de telle manière que l'on ait

$$Om \neq On.$$

Construisons alors les deux conchoïdes de C, C′ et C″, obtenues en retranchant des rayons vecteurs de C des longueurs constantes, égales respectivement à $Om$ et à $On$. Les deux courbes C′ et C″ passent par le point O, et les sphères (S′) et (S″) qui, par hypothèse, les contiennent, passent aussi par le point O.

Cela posé, désignons respectivement par O′ et par O″ les points diamétralement opposés au point O, sur les sphères (S′) et (S″), et soient $p'$ et $p''$ deux points correspondants des courbes C′ et C″. Le segment de longueur constante $p'p''$ est la projection orthogonale, sur la droite $Op'$, du segment fixe O′O″ : cela exige que la droite $Op'$ fasse un angle constant avec la droite O′O″; d'où il résulte que la courbe C′ est l'intersection de la sphère (S′) et d'un cône de révolution ayant son sommet en O′.

Réciproquement, *la courbe, intersection d'un cône de révolution et d'une sphère contenant le sommet du cône, est telle que toutes ses conchoïdes par rapport au sommet du cône sont des courbes sphériques.* Désignons, en effet, par O le sommet du cône, par O′ le point de la sphère qui lui est diamétralement opposé, par $m'$ un point quelconque de la courbe. Menons par O′ une parallèle à l'axe du cône, et soit O″ un point fixe quelconque sur cette parallèle. La projection orthogonale de O′O″ sur $Om$ est évidemment un segment de longueur constante; donc, etc.

On a donc bien obtenu la solution générale du problème, en laissant de côté la solution évidente et sans intérêt signalée plus haut.

## 1983.

(1903, p. 480.)

*Soient* C *le cercle ayant pour diamètre la distance des deux sommets d'un limaçon de Pascal, et* C′ *un cercle bitangent au limaçon :*

1° *L'axe radical des cercles* C *et* C' *passe par un point fixe;*

2° *Le lieu des centres de similitude des cercles* C *et* C' *est une strophoïde droite.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

I. Prenons, pour axe des $x$, l'axe de symétrie du limaçon, pour origine le point double O, et pour axe des $y$ la perpendiculaire à $Ox$.

Soient $a$ l'abscisse du centre du cercle C, $p$ le rayon de C. Considérons le limaçon comme podaire de C par rapport à O. Si

$$(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

est une tangente à C, les coordonnées d'un point du limaçon sont données par

$$x = (p + a\cos\alpha)\cos\alpha,$$
$$y = (p + a\cos\alpha)\sin\alpha$$

ou, en remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs en fonction de $\tan g\frac{\alpha}{2} = t$,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{[p+a+(p-a)t^2](1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \\ y &= \frac{2[p+a+(p-a)t^2]t}{(1+t^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Soit un cercle C' d'équation

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

Pour que C' soit bitangent au limaçon, il faut que l'équation aux $t$ des points d'intersection de (1) et de (2) soit un carré parfait. Tous calculs faits, on trouve

$$(3) \qquad \mu^2 + \lambda^2 + \lambda a = 0,$$
$$\nu = \lambda\frac{p^2-a^2}{a}.$$

L'axe radical de C et C' a pour équation

$$2(\lambda + a)x + 2\mu y + p^2 - a^2 + \frac{\lambda}{a}(p^2 - a^2) = 0.$$

Ce qui montre que l'axe radical passe par le point fixe

$$\left(x = \frac{a^2 - p^2}{2a},\ y = 0\right).$$

II. Les centres de similitude sont définis par l'intersection de la droite des centres et de la circonférence lieu des points d'où l'on voit C et C′ sous le même angle. Exprimant cette propriété, on trouve pour équation de la circonférence

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu}{(x+\lambda)^2 + (y+\mu)^2} = \frac{p^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

La droite des centres est

$$\mu(x-a) - (\lambda + a)y = 0.$$

Éliminons $\lambda$ et $\mu$ entre ces deux équations et l'équation (3); on obtient finalement, après suppression du facteur $[(x-a)^2 + y^2]$,

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Le lieu est donc une strophoïde droite passant par le centre du cercle C et ayant, pour point double, le point double du limaçon. Il est à remarquer que ce lieu est indépendant de $p$.

## 1985.

(1903, p. 528.)

*On sait que le lieu des milieux des cordes normales à une ellipse est une sextique.*

*Montrer que l'aire de cette courbe est la moitié de celle de l'ellipse de Frégier relative à l'ellipse donnée.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'ellipse considérée; la normale à cette courbe au point d'anomalie excentrique $\varphi$ est

$$a \sin\varphi . x - b \cos\varphi . y = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

et le diamètre de cette droite est

$$b^3 \cos\varphi . x + a^3 \sin\varphi . y = 0.$$

En éliminant $\varphi$ entre ces deux équations, on a la sextique considérée

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 (a^6 y^2 + b^6 x^2) - a^4 b^4 c^4 x^2 y^2 = 0.$$

En coordonnées polaires, cette courbe a pour équation

$$\rho^2 = \frac{(abc)^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta)^2 (a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta)}.$$

L'aire A de la courbe sera

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\theta,$$

$$A = 2(abc)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2 (a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta)}.$$

Posons $\operatorname{tang}\theta = t$,

$$d\theta = \frac{dt}{1 + t^2}$$

et

$$A = 2(abc)^4 \int_0^{\infty} \frac{t^2 \, dt}{(a^2 t^2 + b^2)^2 (a^6 t^2 + b^6)}.$$

Or

$$\frac{t^2}{(a^2 t^2 + b^2)^2 (a^6 t^2 + b^6)}$$
$$= \frac{1}{a^4 - b^2}\left(\frac{1}{a^2} \frac{1}{(a^2 t^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{a^2(a^4 - b^4)} \frac{1}{a^2 t^2 + b^2} - \frac{a^2 b^2}{a^4 - b^4} \frac{1}{a^6 t^2 + b^6}\right).$$

Donc

$$A = \frac{2 a^4 b^4 c^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 t^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{a^2(a^4 - b^4)} \right.$$
$$\left. \times \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} - \frac{a^2 b^2}{a^4 - b^4} \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^6 t^2 + b^6}\right).$$

Or

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1 + \left(\frac{at}{b}\right)^2} = \frac{1}{ab}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{at}{b}\right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{2ab}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2t^2+b^2)^2} = \frac{1}{ab^3}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{\left[1+\left(\frac{at}{b}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2ab^3}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1+\left(\frac{at}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{4ab^3},$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{a^6t^2+b^6} = \frac{1}{a^3b^3}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{a^3t}{b^3}\right)}{1+\left(\frac{a^3t}{b^3}\right)^2} = \frac{\pi}{2a^3b^3};$$

d'où

$$A = \frac{2a^4b^4c^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a^2}\,\frac{\pi}{4ab^3}+\frac{b^2}{a^2(a^4-b^4)}\,\frac{\pi}{2ab}-\frac{a^2b^2}{a^4-b^4}\,\frac{\pi}{2a^3b^3}\right),$$

$$A = \frac{\pi ab^3c^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{2b^2}+\frac{b^2}{a^4-b^4}-\frac{a^2b^2}{(a^4-b^4)b^2}\right)$$

$$= \frac{\pi abc^2(a^2-b^2)^2}{2(a^2+b^2)(a^4-b^4)},$$

$$A = \frac{\pi ab}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2.$$

Or, l'ellipse de Frégier a pour équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ac^2}{a^2+b^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bc^2}{a^2+b^2}\right)^2} = 1$$

(*voir*, par exemple : KOEHLER, *Exercices de Géométrie analytique*, Ire Partie, p. 57). L'aire A′ de cette ellipse est

$$A' = \pi\frac{abc^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

Nous voyons alors que

$$A = \frac{A'}{2}.$$

C. Q. F. D.

## 1986.

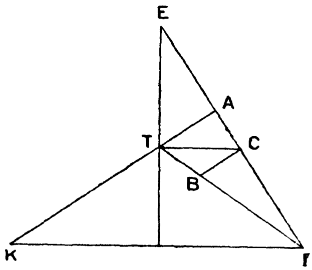
(1903, p. 576.)

*D'un point arbitraire* T *on mène à une parabole donnée les tangentes* TA, TB. *Sur la normale en* A *on projette* *orthogonalement en* C *le point de contact* B. *Du point* T *on élève la perpendiculaire* TE *à* TC, *elle coupe en* E *la normale en* A : *quel est le lieu du point* E, *lorsque* T *varie de position?* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit I le point où TB rencontre AC. Du point I menons à la parabole la tangente autre que IB, et soit K le point de




rencontre de cette tangente et de AT. On a, d'après une propriété connue de la parabole,

$$\frac{KT}{KA} = \frac{IB}{IT} = \frac{IC}{IA},$$

KI est donc parallèle à TC.

Il en résulte immédiatement que le point E est l'orthocentre du triangle TKI, circonscrit à la parabole. E appartient donc à la directrice, qui se trouve être le lieu demandé.

Solution analytique de M. LEZ.