

T. LEMOYNE

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 400-402

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__400_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K2e]

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. T. LEMOYNE.

Les lecteurs démontreront facilement que :

I. *Les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles podaires de chacun des points d'une transversale Δ par rapport à un triangle ABC passent par un même point ω ;*

ce qui revient à dire évidemment que ce point a même puissance par rapport à tous ces cercles.

Lorsque la droite Δ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points M, M', les droites de Simson de M et M' se rencontrent au point ω .

II. *Si, en particulier, la droite Δ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC, les cercles circonscrits aux triangles podaires de chaque point de cette droite par rapport à ABC se coupent tous au point ω .*

Transformons la proposition I à l'aide de l'inversion triangulaire, nous obtiendrons celle-ci :

III. *Les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles podaires de chaque point d'une conique par rapport à un triangle inscrit ABC passent par un même point ω .*

La proposition II nous donne de la même manière cette propriété connue :

Les projections de tout point de l'hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit et le centre de cette courbe sont sur une même circonférence.

Si nous appliquons alors ce résultat à un quadrilatère quelconque $ABCD$ en remarquant que l'hyperbole équilatère circonscrite passe par les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 des quatre triangles ABC, ABD, ACD, BCD , nous verrons que :

IV. *Étant donné un quadrilatère quelconque $ABCD$ et H_1, H_2, H_3, H_4 désignant les orthocentres des triangles formés par les sommets A, B, C, D , les cercles qui passent par les projections de chacun des huit points $A, B, C, D, H_1, H_2, H_3, H_4$ sur les côtés de tous les triangles formés par les sept autres pris trois à trois se coupent en un même point ω .*

Cette propriété contient, comme cas particuliers, deux des théorèmes d'une Note de M. Legrand sur le quadrilatère inscrit publiée dans le numéro de juin 1902 de la *Revue de Mathématiques spéciales* et aussi, je crois, dans le numéro d'août 1901 des *Nouvelles Annales*. Elle étend l'un de ces théorèmes à un quadrilatère quelconque, car le cercle d'Euler d'un triangle ABC est le cercle circonscrit au triangle podaire de l'orthocentre par rapport à ABC ; par suite :

Les quatre cercles d'Euler des triangles ABC, ABD, ACD, BCD passent au point ω . Il en est de même des cercles d'Euler des triangles formés par les quatre orthocentres.

Si le quadrilatère $ABCD$ devient inscriptible, le cercle circonscrit au triangle podaire de D par rapport à ABC se réduit évidemment à la droite de Simson de D et puisque le quadrilatère des orthocentres est symétrique du quadrilatère donné par rapport au point ω :

Les quatre droites de Simson du quadrilatère $ABCD$

passent au point ω ; à cause de la symétrie, il en est de même de celles du quadrilatère des orthocentres.

Il y a encore, dans ce cas, un certain nombre de cercles mentionnés ci-dessus (IV) qui passent en ω .

D'ailleurs, lorsque le quadrilatère ABCD est inscriptible, les quatre cercles d'Euler des triangles ABC, ABD, ACD, BCD ont même rayon et, par raison de symétrie, ce rayon est aussi celui des cercles d'Euler du quadrilatère des orthocentres. Donc :

V. Les centres des quatre cercles d'Euler d'un quadrilatère inscriptible et les centres des quatre cercles d'Euler du quadrilatère des orthocentres sont huit points d'un même cercle qui a pour centre le point ω .