Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 361-363
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__361_0>

CORRESPONDANCE.

M. G. **Vacca**, à Gênes. — Je viens de lire avec intérêt l'article de M. Maurice Fréchet : *Sur une généralisation des notions d'aire et de plan,* dans le numéro de juin 1904 des *Nouvelles Annales* (p. 241).

Permettez-moi d'y ajouter quelques notices historiques.

M. Peano avait déjà donné la généralisation exposée par M. Fréchet dans ses *Applicazioni geometriche del calc. inf.* (Turin, 1887), dans lesquelles on trouve plusieurs des résultats donnés dans le second paragraphe de l'article de M. Fréchet.

Mais déjà en 1873, M. R.-B. Hayward : *On an extension of the term « Area » to any closed circuit in space* (*Proceedings of the London Math. Society,* t. IV, p. 289-291), avait donné la même extension du concept d'aire, son interprétation mécanique, etc. Il donnait aussi le théorème contenu dans les dernières lignes de la Note de M. Fréchet :

The projection of the area (*of a given closed circuit*) *on any plane has an area equal to that of the projection of the circuit itself.*

J'ajouterai enfin que la même idée se rencontre d'une façon très développée dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann, 1844.

M. L. **Troin**, à Grasse. — En compulsant les numéros de l'année 1892 du *Journal de Math. élém.* de M. de Longchamps, j'y ai trouvé, proposé par M. Mannheim, un théorème facile à généraliser.

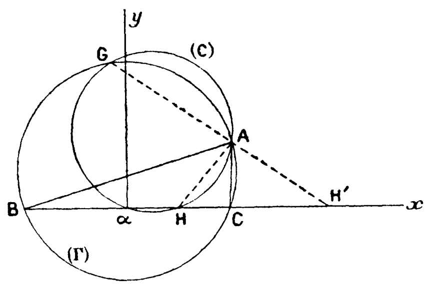
M. Mannheim énonce la propriété comme suit :

Sur la médiane $A\alpha$ *d'un triangle* ABC *comme diamètre on décrit une circonférence de cercle* (C). *Cette courbe coupe au point* G *la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Démontrer que les droites* AB, AC, AG, AH (*hauteur*) *forment un faisceau harmonique.*

Il est facile de s'assurer analytiquement que *la propriété subsiste si l'on remplace* (C) *par une circonférence quelconque passant par* A *et* α. H devient alors le second point d'intersection de BC avec (C) (*fig.* 1).

Prenons, en effet, pour axes de coordonnées les droites

Fig. 1.



rectangulaires αx, αy. Nous aurons pour équation de (Γ)

$$x^2 + y^2 - 2ay - b = 0;$$

pour (C)

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0.$$

GA aura pour équation

$$2\lambda x + 2(\mu - a)y - b = 0.$$

Le point H′ a donc pour abscisse

$$\overline{\alpha H'} = \frac{b}{2\lambda}.$$

H a pour abscisse

$$\overline{\alpha H} = 2\lambda.$$

On a donc

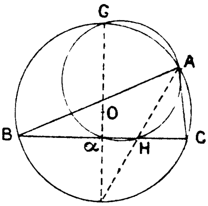
$$\overline{\alpha H}.\overline{\alpha H'} = b = \overline{\alpha C}^2.$$

Cela démontre la proposition.

On peut appliquer cette propriété pour démontrer que les bissectrices d'un angle d'un triangle sont conjuguées harmoniques aux côtés de cet angle.

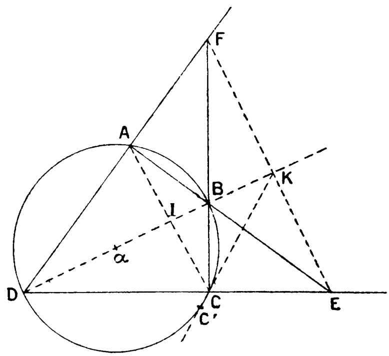
Il est en effet évident que le quadrilatère A G α H est inscriptible (*fig.* 2). On peut s'en servir également pour démontrer

Fig. 2.



sur le quadrilatère inscriptible une propriété d'ailleurs peu intéressante mais qui n'a peut-être pas été observée. A savoir : α étant le milieu de BD (*fig.* 3); I et K étant les points où la

Fig. 3.



diagonale BD rencontre la diagonale AC et la diagonale EF du quadrilatère complet, la droite KC coupe la circonférence circonscrite au quadrilatère en C'. Les quatre points α, I, C, C' sont sur une même circonférence.

Cela résulte de ce que chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.