

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4 (1904), p. 331-336

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_331_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1831.

(1899, p. 579.)

On donne un cercle O et un point A dans l'espace; soit M un point du cercle, démontrer que le plan mené par M perpendiculairement à AM passe par un point fixe A' quand M décrit le cercle.

Trouver le lieu que décrit A' , lorsque A décrit un plan P . Ce lieu est une quadrique; mettre en évidence les plans de section circulaire et reconnaître la nature de la surface.

Trouver le lieu que décrit A' , lorsque A décrit une sphère. Ce lieu est, en général, une surface de quatrième degré. Montrer que toute sphère passant par le cercle O coupe cette surface à distance finie, suivant un second cercle.

(CH. BIOCHE.)

SOLUTION

Par M. H. D.

Soit (S) la sphère passant par le cercle O et le point A . Il est évident que le plan mené par M perpendiculairement à AM passe par le point A' diamétralement opposé à A sur la sphère (S).

Lieu du point A', lorsque A décrit un plan P. — Soit Δ la perpendiculaire au plan du cercle O, menée par son centre, un plan Π passant par Δ coupe P suivant une droite L, et le cercle O en deux points M, M'.

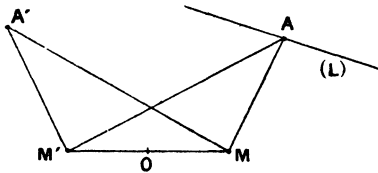
A chaque point (A) de la droite L correspond le point A' obtenu par l'intersection de MA' et M'A' respectivement perpendiculaires à MA et M'A.

Si A décrit la droite L, MA' et M'A' engendrent deux faisceaux homographiques.

Le lieu du point A' est donc une conique passant par M et M'.

Cette courbe est la section du lieu cherché par le plan Π .

Le lieu est donc une quadrique (Σ) qui passe par le



cercle O, et qui admet évidemment pour plan de symétrie le plan mené par Δ perpendiculairement à P.

Soit ω un point de Δ .

La sphère de centre ω et passant par le cercle O est coupée par P suivant un cercle. Si A décrit ce cercle, A' décrit le cercle symétrique par rapport à ω . Le second plan cyclique de (Σ) est donc parallèle à P.

Revenons à la section de (Σ) par le plan Π . Si A s'éloigne à l'infini sur L, A' est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à L.

Soit L' la parallèle à cette direction menée par le point O. Si p désigne le point de rencontre de P et Δ , le point commun à L et L' appartient à la sphère de diamètre Op. Cette sphère coupe le plan P suivant un cercle par lequel passe le cône asymptotique de sommet O.

Déterminons les génératrices de (Σ), parallèles à la génératrice Op de ce cône.

Si A est sur le cercle O, les plans qui définissent le point A' passent par une même droite, parallèle à Δ et qui rencontre le cercle O au point diamétralement opposé de A.

Donc :

Si le plan P coupe le cercle O en deux points, (Σ) est un hyperboloïde à une nappe.

Si le plan P est tangent au cercle O, (Σ) est un cône.

Si le plan P est parallèle au plan du cercle O, (Σ) est un parabolôïde de révolution autour de Δ .

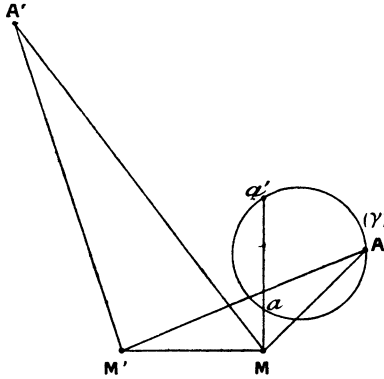
Si le plan P coïncide avec le plan du cercle O, (Σ) est un cylindre de révolution autour de Δ .

Si le plan P est parallèle à Δ , (Σ) se décompose en deux plans : le plan du cercle C et le symétrique de P par rapport à Δ .

Lieu du point A, lorsque A décrit une sphère Γ . — Déterminons la section du lieu par un plan II, mené par Δ .

Le point A se déplace sur un cercle γ .

Cherchons le degré de la section. Pour que A' soit sur une



droite L, il faut que A soit sur une conique Λ (première partie). Cette conique rencontre γ en quatre points auxquels correspondent les points du lieu situés sur L.

Si A vient en (a) ou en (a'), le point A' vient en M' .

Le lieu est donc une surface du quatrième degré qui passe deux fois par le cercle O.

Le point A' est rejeté à l'infini si les droites MA, M'A sont parallèles. Il en résulte que le lieu passe par le cercle de l'infini.

Il admet évidemment pour plan de symétrie le plan mené par Δ et le centre de Γ .

Si A parcourt la section de Γ par le plan du cercle O, le point A' est rejeté à l'infini dans la direction Δ . Aux points de rencontre de Γ et du cercle O correspondent deux génératrices du lieu, parallèles à Δ .

Une sphère passant par le cercle O coupe la surface lieu suivant une courbe du huitième degré comprenant le cercle double O, et le cercle de l'infini. Il reste donc un cercle à distance finie.

Remarque. — Soit ω un point de Δ . La sphère de centre ω et passant par le cercle O coupe Γ suivant un cercle C. Si A décrit le cercle C, A' décrit le cercle C', symétrique de C par rapport au point ω . D'où une infinité de cercles situés sur le lieu.

Le plan d'un de ces cercles coupe la surface du quatrième ordre suivant le cercle C' et suivant une ellipse; on voit facilement que cette ellipse est la transformée d'un cercle de Γ situé dans un plan horizontal.

Le cercle et l'ellipse se coupent en deux points situés sur le cercle O et en deux autres α et β où le plan est tangent à la surface lieu.

Ce plan est d'ailleurs perpendiculaire au plan de symétrie de la surface; il enveloppe un cylindre parabolique.

1901 à 1907

Proposées par M. LEAUTÉ.

[1901, p. 47 (1)]

SOLUTION

Par M. G. FONTENE.

Ces théorèmes résultent de la représentation elliptique d'une biquadratique gauche par les formules

$$\frac{x_1}{p''u} = \frac{x_2}{p'u} = \frac{x^3}{pu} = \frac{x^4}{1},$$

(1) Les solutions des questions 1901, 1902, 1904, 1906 et 1907 ont déjà été données en octobre 1902. La question 1903 a été résolue en octobre 1903.

que l'on trouve par exemple dans l'Ouvrage d'Halphen ; la courbe est l'intersection des quadriques

$$x_1 x_4 = 6x_3^2 - \frac{1}{2} g_2 x_3 x_4,$$

$$x_2^2 = \frac{2}{3} x_3 (x_1 - g_2 x_4) - g_3 x_4^2,$$

dont la première est un cône de sommet B. *Quatre points dans un même plan sont caractérisés sur la biquadratique, par ce fait que la somme de leurs arguments est une période* ; deux points, dont la somme des arguments est zéro ou une demi-période, sont dans un même plan bitangent à la courbe, c'est-à-dire que la corde qui les joint est la génératrice d'un cône du second ordre passant par la courbe ; le plan osculateur, en un point d'argument u , rencontre de nouveau la courbe en un point dont l'argument est $-3u$.

Les questions 1902, 1904, 1906 sont des conséquences immédiates de ces faits connus ; pour la question 1906, on peut considérer les points d'inflexion de la cubique plane qui est la perspective de la courbe, quand le point de vue est pris sur la courbe.

Si l'on considère les droites rencontrant la courbe en deux points dont la somme des arguments est k , et celles qui correspondent à $-k$, on a les deux systèmes de génératrices d'une quadrique passant par la courbe. Une droite rencontrant la courbe en deux points dont la différence des arguments est constante engendre une quadricuspidale.

Ces faits donnent la solution des questions 1905 et 1907.

Pour la question 1903, considérons sur une quadrique fixe une biquadratique et des courbes appartenant à un faisceau tel qu'elles ne coupent la biquadratique qu'en deux points variables, La somme des arguments de ces deux points est alors constante, et l'on peut les obtenir en menant un plan sécant variable par une corde EF de la courbe.

Il existe dans le faisceau quatre courbes tangentes à la biquadratique, et l'on a les points de contact en menant par EF les plans tangents à la courbe ; or le rapport anharmonique de ces plans tangents est égal à l'invariant absolu des fonctions elliptiques correspondant à la courbe. Comme il y a correspondance homographique entre le coefficient angulaire du plan sécant

mené par EF et un paramètre λ qui correspond uniformément aux courbes du faisceau, la question posée et résolue.

L'existence des seize points à plans surosculateurs est bien connue. Si l'on donne à l'argument u les valeurs $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, les quatre points obtenus sont dans le plan $x_2 = 0$, plan polaire du point B par rapport aux quadriques qui contiennent la courbe; cela résout la question 1901.

Halphen remarque que tout plan contenant trois des seize points en contient un quatrième; la propriété du tétraèdre conjugué commun par rapport à ces seize points est remarquable.

Relativement à la question 1905, M. G. Kohn a obtenu *géométriquement* (*Monatshefte*, 1900) un système de deux quadriques telles qu'il existe une infinité de contours quadrangulaires ayant un côté sur l'une des quadriques et trois côtés sur l'autre, les quatre sommets étant sur la biquadratique d'intersection.