

H. LAURENT

**Sur les substitutions qui transforment  
une forme du second degré donnée en  
une autre également donnée**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1904), p. 29-38

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_29\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_29_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

[B2c]

**SUR LES SUBSTITUTIONS QUI TRANSFORMENT UNE FORME  
DU SECOND DEGRÉ DONNÉE EN UNE AUTRE ÉGALEMENT  
DONNÉE;**

PAR M. H. LAURENT.

---

Je me propose de montrer comment on peut former facilement *toutes* les substitutions linéaires qui transforment une forme quadratique donnée en une autre

également donnée, quand cette opération est possible. J'aurai pour cela besoin d'établir quelques propositions préliminaires.

Soit

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, x)$$

une substitution orthogonale, c'est-à-dire telle que

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots = x_1^2 + x_2^2 + \dots$$

alors on a, comme l'on sait

$$(1) \quad \begin{cases} a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases} \\ \cdot \\ a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \end{cases}$$

Je dis que la substitution inverse de

$$(2) \quad \begin{cases} x'_i = a_{i1}x_1 + \dots + (a_{ii} + 1)x_i + \dots + a_{in}x_n \\ (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

que nous écrivons ainsi :

$$Ax_i = A_{i1}x'_1 + A_{i2}x'_2 + \dots + A_{in}x'_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

est gauche et que l'on a

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn}.$$

Nous poserons

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} + 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad A_{ij} = \frac{\partial A}{\partial a_{ij}},$$

alors on aura

$$\begin{aligned} A &= A_{11}(a_{11} + 1) + A_{12}a_{12} + \dots + A_{1n}a_{1n}, \\ 0 &= A_{11}a_{21} + A_{12}(a_{22} + 1) + \dots + A_{1n}a_{2n}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

multipliant la première de ces formules par  $a_{11}$ , la seconde par  $a_{21}$ , etc., et ajoutant, on aura, en vertu de (1),

$$A a_{11} = A_{11} + A_{11} a_{11} + A_{12} a_{21} + \dots + A_{1n} a_{n1}$$

ou

$$A a_{11} = A_{11}(a_{11} + 1) + A_{12} a_{21} + \dots + A_{1n} a_{n1};$$

on aurait de même

$$A a_{12} = A_{11} a_{12} + A_{12}(a_{22} + 1) + \dots + A_{1n} a_{n2},$$

$$A a_{13} = A_{11} a_{13} + A_{12} a_{23} + \dots + A_{1n} a_{n3},$$

.....

Mais on a, en résolvant ces équations par rapport aux A,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} + 1 & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \\ A_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & 0 & \dots & a_{n3} \\ \dots & . & \dots & \dots \end{vmatrix}, \\ \dots \end{array} \right.$$

D'un autre côté, on a directement

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} + 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} + 1 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} + 1 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} + 1 & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

Dès lors, il est manifeste que

$$A_{12} = - A_{21},$$

et en général :

$$A_{ij} = - A_{ji}.$$

Mais, en développant  $A$  suivant les éléments de la première ligne, on a

$$A = (a_{11} + 1)A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

et en développant la valeur (3) de  $A_{11}$

$$A_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n};$$

on en tire

$$A - A_{11} = A_{11},$$

donc

$$A = 2A_{11} = 2A_{22} = \dots \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Réciproquement, si l'on a*

$$c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -c_{ji},$$

*et si l'on forme les équations*

$$(4) \quad \begin{cases} x'_i - x_i = c_{i1}(x'_1 + x_1) + c_{i2}(x'_2 + x_2) + \dots + c_{in}(x'_n + x_n) \\ (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

*ces équations résolues par rapport à  $x'_1, x'_2, \dots$  fourniront une substitution orthogonale.*

Ce que l'on vérifie facilement en multipliant par  $x'_i + x_i$ , en faisant  $i = 1, 2, \dots, n$  et, en ajoutant, tout disparaît dans le second membre et l'on a

$$x_1'^2 - x_1^2 + x_2'^2 - x_2^2 + \dots = 0$$

ou

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots = x_1^2 + x_2^2 + \dots$$

Si l'on prend

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} - 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

et si l'on écrit  $\frac{\partial C}{\partial c_{ii}}$  au lieu de  $\frac{\partial C}{\partial c_{ii} - 1}$ , les formules (4)

donnent successivement

$$\begin{aligned}
& - c_{i1} x'_1 - c_{i2} x'_2 \dots (c_{ii} - 1) x'_i - \dots \\
& = c_{i1} x_1 + \dots + (c_{ii} + 1) x_i + \dots,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
- C x'_1 = & \left\{ \frac{\partial C}{\partial c_{11}} [(c_{11} + 1) x_1 + c_{12} x_2 + \dots] \right. \\
& + \frac{\partial C}{\partial c_{12}} [c_{21} x_1 + (c_{22} + 1) x_2 + \dots] \\
& + \dots \dots \dots \left. \right\};
\end{aligned}$$

enfin, en observant que  $c_{ij} = -c_{ji}$  et que

$$\begin{aligned}
(c_{11} - 1) \frac{\partial C}{\partial c_{11}} + c_{12} \frac{\partial C}{\partial c_{21}} + \dots & = C, \\
c_{21} \frac{\partial C}{\partial c_{11}} + (c_{22} - 1) \frac{\partial C}{\partial c_{12}} + \dots & = 0, \\
\dots \dots \dots & \dots
\end{aligned}$$

on a

$$C x'_1 = x_1 \left( 2 \frac{\partial C}{\partial c_{11}} + C \right) + x_2 2 \frac{\partial C}{\partial c_{12}} + \dots$$

Ces résultats peuvent se résumer comme il suit : en général, si  $s$  désigne la substitution

$$x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{in} x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et si  $t$  désigne la substitution

$$x'_i = \beta_{i1} x_1 + \dots + \beta_{in} x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

convenons de représenter par  $ps + qt$  la substitution

$$x'_i = (p \alpha_{i1} + q \beta_{i1}) x_1 + \dots + (p \alpha_{in} + q \beta_{in}) x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On voit que si  $G$  désigne une substitution gauche et symétrique (les  $c_{ii}$  sont nuls) et si  $\omega$  désigne une substitution orthogonale, on aura

$$\omega = \frac{2}{G \pm 1} \pm 1 \quad \text{et} \quad G \pm 1 = \frac{2}{\omega \pm 1};$$

les signes  $\pm$  proviennent d'une part de ce que, dans la démonstration de notre premier théorème, on aurait pu remplacer les  $a_{ii} + 1$  par les  $a_{ii} - 1$ , et que dans la réciproque on aurait pu remplacer dans les premiers membres de (4),  $x'_i - x_i$  par  $x_i - x'_i$ .

Il résulte de là que nous avons trouvé le moyen de construire toutes les substitutions orthogonales, sans autres calculs que des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir ne sont qu'un cas particulier d'une question beaucoup plus générale. Soient

$$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad f' = \Sigma \beta_{ij} x_i x_j$$

deux formes quadratiques; décomposons-les en carrés, et supposons

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2, \quad f' = X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2,$$

les  $X$  et les  $X'$  étant des fonctions linéaires, que nous supposerons d'abord réelles. Posons

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} X'_i - X_i = c_{i1}(X'_1 + X_1) + c_{i2}(X'_2 + X_2) + \dots + c_{in}(X'_n + X_n) \\ (i = 1, 2, \dots, n), \end{array} \right.$$

et supposons

$$c_{ji} = -c_{ji}, \quad c_{ii} = 0;$$

on aura

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots = X_1'^2 + X_2'^2 + \dots$$

La substitution (5) transforme  $f$  en  $f'$ , elle n'est pas réelle, si les fonctions  $f$  et  $f'$  ne sont pas toutes deux des sommes de carrés positifs. Supposons

$$f = -X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2, \quad f' = -X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2.$$

Pour transformer  $f$  en  $f'$ , on fera usage de la trans-

formation

$$\begin{aligned}
-(X'_1 - X_1) &= c_{11}(X_1 + X'_1) + c_{12}(X_2 + X'_2) + \dots, \\
(X'_2 - X_2) &= c_{21}(X_1 + X'_1) + c_{22}(X_2 + X'_2) + \dots, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Si  $f$  et  $f'$  contenaient un plus grand nombre de carrés négatifs on voit sans peine comment il faudrait modifier les formules de transformation pour changer  $f$  en  $f'$ .

Au fond, on peut représenter toutes les transformations de  $f$  en  $f'$  au moyen de la formule (5) et si l'on désigne par  $s$  et  $s'$  les substitutions qui changent  $f$  et  $f'$  en sommes de carrés, et par  $\Omega$  la substitution orthogonale (5), les substitutions changeant  $f$  en  $f'$  seront de la forme

$$s \Omega s'^{-1}.$$

Les substitutions laissant  $f$  invariant seront de la forme

$$s \Omega s^{-1};$$

ce sont des transformées de substitutions orthogonales.

L'équation en  $s$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

est ce que l'on appelle l'équation caractéristique de la substitution  $s$  :

$$(7) \quad x'_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les transformées de  $s$  ont même équation caractéristique que  $s$  et, en effet, en développant l'équation caractéristique, on a

$$s^n + p_1 s^{n-1} + \dots = 0,$$

et en appelant  $t$  une substitution quelconque

$$ts^n t^{-1} + p_1 ts^{n-1} t^{-1} + \dots = 0;$$



mais

$$ts^n t^{-1} = (tst^{-1})^n.$$

Donc, etc.

*Les équations caractéristiques des substitutions qui laissent les formes quadratiques invariantes sont les équations caractéristiques des substitutions orthogonales.*

Supposons la substitution (7) orthogonale, élevons le premier membre de son équation caractéristique au carré, nous aurons

$$\begin{vmatrix} -2\alpha_{11}s + 1 + s^2 & -2\alpha_{12}s & \dots & -2\alpha_{1n}s \\ -2\alpha_{21}s & -2\alpha_{22}s + 1 + s^2 & \dots & -2\alpha_{2n}s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 2\alpha_{11} - \left(s + \frac{1}{s}\right) & 2\alpha_{12} & \dots & 2\alpha_{1n} \\ 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} - \left(s + \frac{1}{s}\right) & \dots & +2\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

avec

$$2\alpha_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = 2\alpha_{ji};$$

cette équation montre que si  $\nu_1, \nu_2, \dots$  sont les racines de l'équation caractéristique, les quantités  $\nu_i + \frac{1}{\nu_i}$  sont réelles (si les  $a_{ij}$  sont réels).

Maintenant l'équation (6) s'obtient en faisant  $x'_i = s x_i$  dans (7) et en éliminant les  $x_{ij}$  elle s'obtiendra aussi en faisant  $x'_i = s x_i$  dans les équations correspondantes

$$x'_i - x_i = c_{i1}(x'_1 + x_1) + c_{i2}(x'_2 + x_2) + \dots,$$

ce qui donne

$$(s - 1)x_i = c_{i1}(s + 1)x_1 + c_{i2}(s + 1)x_2 + \dots,$$

d'où l'on tire cette nouvelle forme de l'équation en  $s$ ,

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{s-1}{s+1} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \frac{s-1}{s+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on remplace  $\frac{s-1}{s+1}$  par  $t$  et si l'on élève au carré, on trouve

$$\begin{vmatrix} t^2 + \dots & c_{13}c_{23} + \dots & c_{12}c_{32} + \dots \\ c_{13}c_{23} + \dots & t^2 + \dots & c_{13}c_{32} + \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

équation en  $t^2$  qui a toutes ses racines réelles.

On sait que si l'on forme les mineurs du premier membre obtenus en supprimant : 1° la dernière ligne et la dernière colonne; 2° les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc., on obtient des fonctions de Sturm. Or, pour  $t^2 = -\infty$  on n'obtient que des variations, pour  $t^2 = 0$  on n'a que des permanences, en vertu des propriétés connues des déterminants symétriques, donc l'équation en  $t^2$  a ses racines nulles ou négatives, donc les valeurs de  $s$  sont données par des équations de la forme

$$\frac{s-1}{s+1} = \alpha \sqrt{-1}$$

ou

$$s = \frac{1 + \alpha \sqrt{-1}}{1 - \alpha \sqrt{-1}} = \frac{1 + 2\alpha \sqrt{-1} - \alpha^2}{1 + \alpha^2},$$

ou en posant

$$\frac{r\alpha}{1 + \alpha^2} = \sin \varphi, \quad \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \cos \varphi,$$

on a

$$s = e^{i\varphi} \sqrt{-1},$$

( 38 )

telle est la forme d'une racine de l'équation caractéristique d'une substitution orthogonale à coefficients réels.

En adoptant notre symbolique pour la représentation des substitutions linéaires, on voit qu'une substitution orthogonale est de la forme

$$\xi_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}} + \xi_2 e^{\varphi_2 \sqrt{-1}} + \dots + \xi_n e^{\varphi_n \sqrt{-1}}, \quad \xi_i \xi_j = 0, \quad \xi_i^2 = 1,$$

de sorte que la puissance  $p^{\text{ième}}$  d'une substitution orthogonale s'obtient en multipliant par  $p$  les arguments  $\varphi$ .