NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Tétraèdres, octaèdres, icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 289-309

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__289_0>

[$M^2 5$, L^2]

TÉTRAÈDRES, OCTAÈDRES, ICOSAÈDRES INSCRITS A UNE CUBIQUE GAUCHE ET CIRCONSCRITS A UNE QUADRIQUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I. — PREMIÈRE MÉTHODE.

1. THÉORÈME. — *Sous des conditions, en nombre* 3, 4 *ou* 5, *il existe, en nombre doublement infini, des tétraèdres, des octaèdres ou des icosaèdres inscrits à une cubique gauche* Γ *et circonscrits à une quadrique* Q.

La cubique étant donnée, la quadrique dépend donc de paramètres en nombres 6, 5 *ou* 4 :

(*a*). *Pour des tétraèdres, on prend à volonté* 3 *couples de points sur la cubique, ce qui donne* 3 *cordes* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, *et la quadrique* Q *est celle qui admet pour génératrices les* 3 *droites qui portent ces cordes;*

(*b*). *Pour des octaèdres, on prend à volonté* 4 *points* I, J, K, L *sur la cubique, dans un certain ordre, ce qui donne un quadrilatère gauche, et la quadrique* Q *est l'une quelconque des quadriques en nombre simplement infini qui passent par les côtés de ce quadrilatère;*

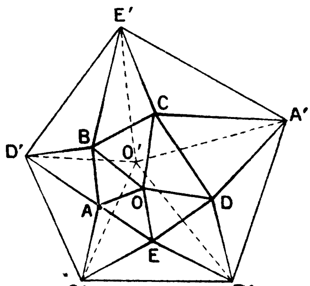
(*c*). *Pour des icosaèdres, on prend à volonté sur la cubique un système de* 4 *points*

$$\begin{matrix} M, & M', \\ N, & N', \end{matrix}$$

et la quadrique Q *est celle qui passe par les* 3 *côtés du* *contour ouvert* MNN′M′, *en touchant la cubique aux points extrêmes* M *et* M′.

2. Étant données une cubique gauche Γ et une quadrique Q, si O est un point de la cubique, on peut chercher un angle polyèdre à p arêtes, de sommet O, dont les arêtes s'appuient sur la cubique et dont les plans des faces touchent la quadrique; comme le cône Σ′ de sommet O qui a pour directrice la cubique, et le cône Σ de sommet O qui est circonscrit à la quadrique, sont 2 cônes du second degré, le problème n'est possible en général que pour certaines positions du point O. S'il arrive que, pour $p = 3, 4, 5$, la condition de fermeture de l'angle polyèdre soit satisfaite en tout point de la cubique, il existera une double infinité de tétraèdres, d'octaèdres et d'icosaèdres inscrits à la cubique et circonscrits à la quadrique. En effet, pour $p = 5$ par exemple, O et A étant 2 points de la cubique (*fig.* 1), il existe alors un angle pentaèdre de sommet O

Fig. 1.



dont les arêtes rencontrent la cubique aux points A, B, C, D, E et qui est circonscrit à la quadrique; le point A donne de même un angle pentaèdre de cette nature avec les points BOEC′D′, les points B, C, D en donnent d'autres avec les points COAD'E', DOBE'A', EOCA'B', le point E en donne un avec les points AODB'C'; enfin le point A' en donne un avec les points B'DCE'O' et celui du point B' est alors fourni par les points C'EDA'O', etc.

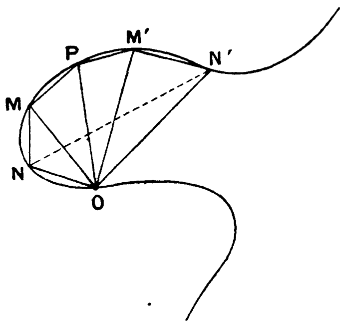
3. On sait d'ailleurs que l'existence d'*un* angle polyèdre à p arêtes, de sommet O, inscrit au cône Σ' et circonscrit au cône Σ, entraîne l'indétermination pour un tel angle polyèdre.

Si l'on prend d'abord le cas de l'octaèdre ($p = 4$), la quadrique Q étant liée à la cubique Γ par les conditions (b), l'angle tétraèdre (O, IJKL) satisfait aux conditions requises; donc....

Pour le tétraèdre ($p = 3$), avec les conditions (a), si l'on mène par exemple les droites OA_1, OA_2, le plan OA_1A_2 est tangent à la quadrique; si l'on mène par OA_1 et OA_2 les 2 plans tangents à la quadrique autres que le plan OA_1A_2, ces deux plans tangents doivent encore couper la cubique en un même point P. Or, soient en général P_1 et P_2 les deux points où ces plans tangents coupent encore la cubique. Il y a involution entre les points O et P_1, le plan (A_1, OP_1) devant être tangent à la quadrique sans être un plan passant par A_1A_2; et, avec les conditions (a), les points B_1 et B_2 se correspondent dans cette involution, ainsi que les points C_1 et C_2. L'involution entre O et P_2 étant déterminée par les deux mêmes couples de points, on voit que P_1 et P_2 sont un même point P.

Pour l'icosaèdre ($p = 5$), avec les conditions (c), si l'on mène les droites OM, ON, ON', OM', les plans OMN, ONN', ON'M' sont tangents à la quadrique; si l'on mène par OM et OM' les deux plans tangents à la quadrique autres que OMN et OM'N', ces 2 plans tangents doivent encore couper la cubique en un même point P (*fig.* 2) : c'est ce qui arrive par le fait que la quadrique est tangente à la cubique aux points M et M'. En effet, soient en général P_1 et P_2 les 2 points où ces plans tangents coupent encore la cubique. Il y a involution entre O et P_1, le plan (M, OP_1) devant être tangent à la quadrique sans être généralement un plan passant par MN; or, si l'on met P_1 en M', O est en N' indépendamment du fait rappelé ci-dessus; d'autre part, la tangente MT à la cubique au point M étant

Fig. 2.



supposée toucher la quadrique, si l'on met P_1 en M, O est en N, puisque le seul plan tangent que l'on puisse mener à la quadrique par la tangente MT est le plan TMN; l'involution entre O et P_1 est donc déterminée par les deux couples de points M', N' et M, N. L'involution entre O et P_2 étant déterminée par les deux mêmes couples de points, on voit que P_1 et P_2 sont un même point P.

II. — Autre méthode (faits nouveaux).

Une autre méthode consiste à définir par une cubique Γ des tétraèdres, des octaèdres, des icosaèdres inscrits, dépendant de deux paramètres, tels que l'enveloppe des plans de leurs faces soit dans chaque cas une quadrique.

II (a). — Tétraèdre.

4. J'ai obtenu précédemment (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 13) le cas du tétraèdre par le calcul suivant. Représentons les points de la cubique par les formules

$$x = \lambda^3, \qquad y = \lambda^2, \qquad z = \lambda, \qquad t = 1,$$

en mettant pour simplifier x et y au lieu de ax et by : le tétraèdre de référence étant $\mathcal{ABCD}$, la cubique passe aux points $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, les tangentes étant $\mathcal{AB}$ et $\mathcal{DC}$, les plans osculateurs étant $\mathcal{ABC}$ et $\mathcal{DCB}$. Considérons les tétraèdres ABCD en nombre doublement infini, qui sont inscrits à la cubique et dont les sommets ont pour paramètres α, β, γ, δ les racines des équations du quatrième degré

$$f(\lambda) + h\,\varphi(\lambda) + k\,\psi(\lambda) = 0, \tag{1}$$

h et k variant. Si l'on se donne les sommets A et B, le tétraèdre est unique; dès lors la surface qui est l'enveloppe des plans des faces des tétraèdres est une quadrique Q, attendu que, par une corde AB de la cubique, il passe seulement deux de ces plans, à savoir les plans des faces ABC, ABD du tétraèdre dont cette corde est une arête.

La cubique Γ étant donnée, la quadrique Q dépend de 6 paramètres. L'équation (1) dépend en effet de paramètres apparents en nombre $5 \times 3 - 1$; mais on peut effectuer sur h et k les substitutions

$$\frac{h}{Ah' + Bk' + C} = \frac{k}{Dh' + \ldots} = \frac{1}{Gh' + \ldots},$$

de sorte que le nombre des paramètres fictifs est

$3 \times 3 - 1$; il reste donc 6 paramètres. Cela résulte encore de ce que les racines de l'équation (1), h et k variant, sont simplement assujetties à vérifier deux relations de la forme

$$\begin{aligned} A + Bs_1 + Cs_2 + Ds_3 \qquad\quad &= 0, \\ B's_1 + C's_2 + D's_3 + E's_4 &= 0, \end{aligned}$$

s_1 étant $\Sigma\alpha$, etc.

5. Il suit de là que l'existence d'un tétraèdre de l'espèce indiquée n'entraîne pas celle d'une double infinité de tels tétraèdres, puisque, s'il en était ainsi, la donnée de Γ laisserait $(4-2)+5$ ou 7 paramètres pour la quadrique.

La cubique étant donnée, pour obtenir la quadrique avec 6 paramètres, on peut se donner 2 tétraèdres ABCD et A'B'C'D' inscrits à la cubique; les sommets des 2 tétraèdres forment un système (singulier) de 8 points de Lamé, les 2 tétraèdres sont conjugués à une même quadrique, et les plans de leurs faces forment un système de 8 plans de Lamé; il existe donc une double infinité de quadriques Q inscrites aux 2 tétraèdres. Une quadrique ainsi obtenue forme avec la cubique Γ un système de l'espèce considérée ici; elle dépend de 6 paramètres, chaque tétraèdre donnant seulement 2 paramètres (puisqu'il existe une double infinité de tels tétraèdres).

6. Le sommet D étant choisi, il existe une infinité de trièdres inscrits au cône Σ' et circonscrits au cône Σ du nº 2; A, B, C étant les points où les arêtes de l'un de ces trièdres rencontrent la cubique, le plan ABC est tangent à la quadrique. *Pour une même position du point* D *les plans* ABC *passent par une même généra-*

trice Δ *de la quadrique,* génératrice du système de celles qui rencontrent A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, et à chacune de ces génératrices correspond un seul point D. En effet, si l'on se donne le point D, les paramètres h et k de la relation (1) sont liés par une équation linéaire, et les paramètres α, β, γ des points A, B, C sont donnés par une équation du troisième degré de la forme

$$F(\lambda) + m\Phi(\lambda) = 0;$$

dans ces conditions, le plan ABC passe par une droite fixe, puisque, si l'on se donne le point A, le plan ABC est unique. Ce fait, quand on regarde la cubique comme l'intersection incomplète de deux quadriques, est lié à celui-ci (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 69, lignes 16 et suiv.) : *Si l'on considère les tétraèdres* ABCD *inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre, le sommet* D *étant donné, les plans* ABC *passent par un point fixe;* chacun de ces plans donne d'ailleurs une infinité de triangles ABC.

La cubique Γ étant donnée, si, pour obtenir la quadrique Q avec 6 paramètres, on se donne les 2 tétraèdres DABC et DA′B′C′ inscrits à la cubique, avec même sommet D, comme les 6 arêtes des 2 trièdres D sont à un même cône du second ordre, les 6 plans tangents DBC, DCA, DAB, DB′C′, ... donnent seulement 5 conditions pour la quadrique Q, et c'est alors ainsi que les 8 plans tangents donnent seulement 7 conditions. En outre, d'après ce qui précède, les quadriques Q qui vérifient ces 7 conditions passent par la droite d'intersection Δ des 2 plans ABC, A′B′C′; ou encore, si une quadrique Q vérifie les 5 premières conditions, la condition pour elle de passer par la droite Δ est une condition double et non une condition triple. [En tenant compte de ce que les 2 trièdres (D, ABC) et (D, A′B′C′)

ont leurs arêtes sur un même cône du second ordre, et de ce que la condition triple dont on vient de parler se réduit à une condition double, on exprime complètement que D est sur la cubique gauche des 6 points A, B, C, A′, B′, C′.]

7. Si l'on se donne les points A et B par leurs paramètres α et β, les deux équations

$$f(\alpha)+h\varphi(\alpha)+k\psi(\alpha)=0,$$
$$f(\beta)+h\varphi(\beta)+k\psi(\beta)=0$$

déterminent h et k, et l'on a ensuite les paramètres γ et δ des points C et D. Si l'on prend comme points A et B les points A_1 et A_2 par exemple [n° 1 (a)], l'un des points C et D est quelconque; on aura donc les paramètres des couples de points (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) en résolvant les deux équations

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}=\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\beta)}.$$

8. Les paramètres des 3 sommets d'une face ABC du tétraèdre sont liés par la relation

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & \varphi(\alpha) & \psi(\alpha) \\ f(\beta) & \varphi(\beta) & \psi(\beta) \\ f(\gamma) & \varphi(\gamma) & \psi(\gamma) \end{vmatrix}=0,$$

qui se transformerait en une relation triplement quadratique et symétrique.

L'équation du plan ABC est

$$x-y\Sigma\alpha+y\Sigma\alpha\beta-\alpha\beta\gamma=0,$$

comme on le voit en cherchant les points de la cubique situés dans ce plan ($x=\lambda^3, \ldots$); les coordonnées de ce plan sont

$$u = 1, \qquad v = -\Sigma\alpha, \qquad w = \Sigma\alpha\beta, \qquad r = -\alpha\beta\gamma,$$

et la relation entre α, β, γ donnerait l'équation tangentielle de la quadrique.

Cette même relation, où l'on regarde α et β comme donnés, est une équation du second degré en γ, faisant connaître γ et δ.

II (*b*). — Octaèdre.

9. *Pour l'octaèdre, 2 sommets opposés quelconques se correspondent dans une involution sur la cubique, ou encore les 3 diagonales sont des génératrices d'un hyperboloïde* H *passant par la cubique; ces 3 génératrices sont liées sur l'hyperboloïde par une relation triplement linéaire et symétrique.*

Étant donnée une cubique gauche Γ, courbe unicursale, considérons sur cette cubique une involution de points qui donne lieu aux cordes AA′, BB′, CC′, ...; les sécantes doubles AA′, ... sont les génératrices d'un système d'un hyperboloïde H passant par la cubique. Établissons entre trois de ces génératrices, au moyen d'un paramètre qui leur correspond uniformément, une correspondance triplement linéaire et symétrique : l'enveloppe des plans ABC est une quadrique Q, puisque, par une corde AB de la cubique, il passe seulement deux de ces plans, à savoir les plans ABC et ABC′; ou mieux, l'octaèdre à faces triangulaires qui a pour diagonales AA′, BB′, CC′ est circonscrit à une quadrique fixe Q. La cubique étant donnée, l'involution, ou l'hyperboloïde H qui la traduit, dépend de 2 paramètres, la correspondance triplement linéaire et symétrique entre les 3 génératrices dépend encore de 3 paramètres, de sorte que la quadrique Q dépend finalement de 5 paramètres; le système de la cubique et de la quadrique vérifie donc 4 conditions.

II (c). — Icosaèdre.

Il s'agit plutôt ici de propriétés relatives à la figure qui résulte des conditions (c) que d'une méthode pour obtenir cette figure.

10. Les points M et M′ étant pris comme sommets $\mathcal{O}$ et $\mathcal{A}$ du tétraèdre de référence, pour les formules

$$x = \lambda^3, \qquad y = \lambda^2, \qquad z = \lambda, \qquad t = 1,$$

les paramètres de ces points sont 0 et ∞; soient A et $\frac{1}{D}$ ceux des points N et N′. On verra au n° 23 que, des deux relations auxquelles satisfont les 2 couples de points (E, B) et (O, A) de la figure 1, la plus simple est

$$(\mathrm{R}) \qquad \varepsilon \times \beta = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\alpha - A}{D\alpha - 1}.$$

Si l'on acceptait de prendre cette relation comme point de départ pour le traitement du problème de l'icosaèdre, on aurait à montrer d'abord que les 5 relations analogues à la précédente, autour du point O, définissent autour de ce point un angle pentaèdre *variable* circonscrit à un cône du second degré, et ensuite que les cônes ainsi obtenus sont circonscrits à une même quadrique, ou encore que l'enveloppe du plan OAB dépendant de 2 paramètres est une quadrique (les 3 points O, A, B jouant le même rôle).

Je me contente de signaler ce fait; mais j'indiquerai une conséquence des 2 relations du n° 23, une interprétation géométrique remarquable de celle qui est écrite ci-dessus, ...

11. Le paramètre du point A′ de la figure 1 est donné par la relation

$$\omega\alpha' = \frac{\gamma - A}{D\gamma - 1}\,\frac{\delta - A}{D\delta - 1};$$

comme on a

$$\gamma\alpha = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\beta - A}{D\beta - 1}, \qquad \delta\alpha = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\varepsilon - A}{D\varepsilon - 1},$$

on peut avoir α' en fonction des quantités α, ω, $\beta + \varepsilon$, $\beta\varepsilon$; au moyen des deux formules du n° 23, on trouve finalement

$$\alpha\alpha' = \frac{A}{D}.$$

Donc :

Deux sommets opposés (O, O′), (A, A′), (B, B′), ... *de l'icosaèdre se correspondent dans l'involution définie sur la cubique par les* 2 *couples de points* (M, M′), (N, N′); *les diagonales de l'icosaèdre sont les génératrices d'une quadrique passant par la cubique, deux de ces génératrices étant* MM′ *et* NN′.

12. Si, dans la relation R, on introduit les points B′ et A′ au lieu des points B et A, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{\beta'} = \frac{\omega - A}{\omega - \frac{1}{D}} : \frac{\alpha' - A}{\alpha' - \frac{1}{D}};$$

on a donc, *avec des rapports anharmoniques,*

$$[R] \qquad \left\{ \begin{matrix} (E, B', M, M') \\ \text{ou} \\ (B, E', M, M') \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (O, A', N, N') \\ \text{ou} \\ (A, O', N, N') \end{matrix} \right\}.$$

13. Pour la définition directe des icosaèdres en partant de la cubique, on pourrait, se donnant M et M′, N et N′, choisir les 10 conditions suivantes : d'une part les 6 faits d'involutions relatifs aux diagonales, d'autre part les 4 conditions effectives fournies par les 5 relations [R] autour du point O.

14. L'icosaèdre de la figure 1 donne lieu à un icosaèdre ayant les mêmes sommets et dont les 30 arêtes sont les segments tels que OA′; au point O, par exemple, les 5 faces de cet icosaèdre sont OA′C′, OC′E′, ... *Cet icosaèdre dérivé est circonscrit à une nouvelle quadrique* Q′, ou encore l'enveloppe des plans OC′A′ est une quadrique: en effet, par une corde OC′ de la cubique, il passe seulement deux de ces plans, à savoir les plans OC′A′ et OC′E′, fournis par l'icosaèdre primitif dont O et C′ sont 2 sommets (cet icosaèdre est unique, car le point C′ détermine complètement le point C, et les points O et C donnent un seul icosaèdre).

La quadrique Q′ *est celle qui passe par les trois côtés du contour ouvert* N′MM′N *en touchant la cubique aux points extrêmes* N′ *et* N.

En effet, les 2 couples de points (O, A′) et (C, D) de la figure 1 donnent

$$(O, A, M, M') = (C, D', N, N');$$

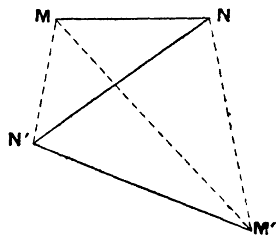
on a donc

$$(D', C, N, N') = (O, A, M', M);$$

or, pour le nouvel icosaèdre, les arêtes consécutives de l'angle pentaèdre en O étant OD′, OA′, OC′, ..., la relation précédente est celle que l'on doit avoir pour les 2 couples de points (D′, C′) et (O, A′), si la quadrique Q′ se déduit de la quadrique Q en remplaçant M et M′ par N et N′, tandis que l'on remplace N et N′ par M′

et M : on obtient ainsi le résultat indiqué. Il est à peine besoin de faire observer que les icosaèdres primitifs et ceux que l'on considère ici sont réciproques, de sorte que les 2 quadriques (*fig.* 3) le sont aussi ([1]).

Fig. 3.



15. Si les sommets de référence $\mathfrak{O}$ et $\mathfrak{A}$ étaient 2 points quelconques de la cubique, en désignant par m, m', n, n' les paramètres des points M, M′, N, N′, on aurait, au lieu de la relation (R) :

$$\left(\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon - m'}\,\frac{\beta - m}{\beta - m'}\right) \times \left(\frac{\omega - n'}{\omega - n}\,\frac{\alpha - n}{\alpha - n'}\right) = \left(\frac{m - n'}{m' - n}\right)^2.$$

16. A chaque point O de la cubique correspond un point P, ou mieux O_1, par la construction de la figure 2 ; il y a involution entre O et O_1, les 2 couples de points N, M et N′, M′ faisant partie de cette involution, et l'on a

$$\omega_1 = \frac{\omega - A}{D\omega - 1} \qquad \text{ou} \qquad D\omega\omega_1 - (\omega + \omega_1) + A = 0;$$

on aurait encore ce résultat en faisant $\alpha = A$ dans les

([1]) En prolongeant chaque face de l'icosaèdre primitif jusqu'à la rencontre des plans des 3 triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère, on formerait un nouvel icosaèdre circonscrit à la quadrique Q; il est probable que cet icosaèdre serait inscrit à une cubique fixe Γ'.

relations

$$\varepsilon \times \beta = k\frac{\alpha - A}{D\alpha - 1},$$

$$\alpha \times \gamma = k\frac{\beta - A}{D\beta - 1},$$

$$\beta \times \delta = k\frac{\gamma - A}{D\gamma - 1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne

$$\alpha = A, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = k = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}, \qquad \delta = \infty, \qquad \varepsilon = \frac{1}{D}.$$

La relation (R) prend ainsi la forme

$$\varepsilon\beta = \omega_1\alpha_1,$$

de sorte que *les* 3 *couples de points*

$$(E, B), \quad (O_1, A_1), \quad (M, M')$$

appartiennent à une même involution sur la cubique.

Une projection conique, avec le point O comme point de vue, donne ce théorème :

Soit $nmo_1m'n'$ *un pentagone inscrit à une conique* S′ *et circonscrit à une conique* S; *soit* i *le point d'intersection des droites* mn *et* $m'n'$. *Si* aa_1 *est une corde de la conique* S′ *passant en* i, *et si du point* a *on mène à la conique* S *deux tangentes qui coupent encore la conique* S′ *en* e *et en* b, *la corde* eb *et la corde* o_1a_1 *se coupent sur* mm'.

La même figure donne ceci par la relation [R] :

Les droites qui passent par le point d'intersection des droites mm' *et* nn' *déterminent sur la conique* S′ *des couples involutifs* (o, o'), (a, a'), ...; *on a alors*

$$[r] \qquad \left\{ \begin{matrix} (e, b', m, m') \\ \text{ou} \\ (b, e', m, m') \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (o, a', n, n') \\ \text{ou} \\ (a, o', n, n') \end{matrix} \right\},$$

o étant le point où la droite io_1 rencontre encore la conique S'.

III. — Analyse du problème.

C'est l'étude des conditions de fermeture indiquées au n° **2** qui m'a conduit aux conditions (*a*), (*b*), (*c*) du n° **1**. Je donnerai une idée de ce calcul, en m'attachant surtout au cas de l'icosaèdre (double contact de la cubique et de la quadrique).

17. L'équation du cône Σ' est, en appelant ω le paramètre du point O,

$$(y-\omega z)^2-(x-\omega y)(z-\omega t)=0$$

ou

$$(\Sigma') \qquad 2Y^2-2XZ=0,$$

en posant

$$X=x-\omega y, \qquad Y=y-\omega z, \qquad Z=z-\omega t;$$

on a d'ailleurs ainsi

$$X+\omega Y=x-\omega^2 z, \qquad Y+\omega Z=y-\omega^2 t,$$
$$X+\omega Y+\omega^2 Z=x-\omega^3 t.$$

D'autre part, les coordonnées du point O étant x' y', z', t' ou ω^3, ω^2, ω, 1, l'équation du cône Σ est une relation du second degré entre les quantités

$$\begin{aligned}
r &= xy'-yx' = \omega^2 X,\\
-q &= xz'-zx' = \omega X+\omega^2 Y,\\
s &= xt'-tx' = X+\omega Y+\omega^2 Z,\\
p &= yz'-zy' = \omega Y,\\
t &= yt'-ty' = Y+\omega Z,\\
u &= zt'-tz' = Z.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par A, B, C, 2F, 2G, 2H les coefficients de X^2, ... dans l'équation du cône Σ, comme on a pour le cône Σ'

$$A' = 0, \quad B' = 2, \quad C' = 0, \quad F' = 0, \quad G' = -1, \quad H' = 0,$$

les invariants du système sont

$$\begin{aligned}
\delta &= ABC + \ldots,\\
\theta &= 2(CA - G^2) - 2(HF - BG),\\
\theta' &= - B + 4G,\\
\delta' &= -2;
\end{aligned}$$

les degrés de ces invariants par rapport à ω sont respectivement 12, 8, 4, 0.

Observons maintenant que, si le point O est sur la quadrique, c'est-à-dire si l'on a

$$f(\omega^3, \omega^2, \omega, 1) = 0,$$

$f = 0$ étant l'équation de la quadrique, le cône Σ se réduit à un *plan double :* δ et θ renfermant donc f en facteur; comme le cône Σ ne peut d'ailleurs devenir évanouissant que de cette façon, si la quadrique Q n'est pas un cône, on voit que δ est, à un facteur constant près, f^2. On a donc

$$\begin{aligned}
\delta &= kf^2,\\
\theta &= 2f \times \varphi,
\end{aligned}$$

φ étant un polynome du second degré en ω.

18. Cela posé, si l'on fait

$$\gamma = \theta^2 - 4\delta\theta',$$

les conditions de fermeture pour le trièdre, l'angle tétraèdre, l'angle pentaèdre, sont respectivement

$$\begin{gathered}
\gamma = 0,\\
\theta\gamma + 8\delta^2\delta' = 0,\\
\gamma^3 - 32\delta^2\delta'(\theta\gamma + 8\delta^2\delta') = 0;
\end{gathered}$$

ces conditions deviennent, après suppression des facteurs f^2, f^3, f^6,

$$\varphi^2 - k\theta' = 0,$$

$$\varphi(\varphi^2 - k\theta') - 2k^2 f = 0,$$

$$(\varphi^2 - k\theta')^3 + 8k^2 f[\varphi(\varphi^2 - k\theta') - 2k^2 f] = 0,$$

et elles sont des degrés 4, 6, 12 en ω. (Ce sont les nombres de sommets du tétraèdre, de l'octaèdre, de l'icosaèdre.)

Écrivons que la dernière est une identité (cas de l'icosaèdre). Les valeurs de ω qui annulent f doivent annuler le polynome $\varphi^2 - k\theta'$ qui est seulement du quatrième degré; donc f doit avoir deux racines doubles, et l'on doit avoir

$$f \equiv P^2 Q, \qquad \varphi^2 - k\theta' \equiv k' PQ,$$

P et Q étant des polynomes du second degré en ω. Ces conditions remplies, le polynome du second degré

$$k'^3 Q + 8k^2(k'\varphi - 2k^2 P)$$

devra être identiquement nul. On a ainsi 9 conditions apparentes.

L'identité $f = P^2 Q$ exige que f ait deux racines doubles, c'est-à-dire *que la cubique* Γ *soit bitangente à la quadrique* Q. On peut supposer que les deux points de contact correspondent aux valeurs $\omega = 0$ et $\omega = \infty$, de sorte que l'on aura

$$P \equiv \omega.$$

Ces deux points de contact étant les sommets $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ du tétraèdre de référence, et les tangentes à la cubique en ces deux points étant les arêtes $\mathcal{DC}$ et $\mathcal{AB}$, l'équation de la quadrique se réduit à

$$\text{(E)} \quad by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2lxt + 2myt = 0,$$

g et m étant analogues de même que b et c; on a ainsi

$$f(\omega) = \omega^2[(b+2g)\omega^2 + 2(f+l)\omega + (c+2m)].$$

On doit avoir par suite les identités

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} &\varphi^2 - k\theta' \equiv k'\omega[(b+2g)\omega^2 + 2(f+l)\omega + (c+2m)],\\ &\qquad k'^3[(b+2g)\omega^2 + \ldots] + 8k^2(k'\varphi - 2k^2\omega) \equiv 0. \end{aligned}\right.$$

19. Il faut alors former l'équation du cône Σ. Or la condition pour qu'une droite touche la quadrique (E) devient, en tenant compte de l'identité $ps+qt+ru=0$,

$$\begin{aligned} -bc.p^2 + (fl - gq + mt + ls)^2 - 4(gm - fl)ru&\\ + 2bg.pr + 2cm.pu - 2cl.qu + 2bl.rt &= 0; \end{aligned}$$

on a donc, pour l'équation du cône Σ,

$$\begin{aligned} -bc\,\omega^2 Y^2 + \big\{(g\omega + l)X + [g\omega^2 + (f+l)\omega + m]Y&\\ + \omega(l\omega + m)Z\big\}^2&\\ + 2b\,\omega^2(g\omega + l)XY + 2c\,\omega(l\omega + m)YZ&\\ + 2[l\omega(b\omega^2 + c) - 2(gm - fl)\omega^2]XZ &= 0. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} R &= g\omega^2 + (f+l)\omega + m,\\ S &= bl\omega^3 - 2(gm - fl)\omega^2 + cl\omega, \end{aligned}$$

on a ainsi, dans l'équation du cône Σ,

$$\begin{aligned} A &= (g\omega + l)^2,\\ B &= R^2 - bc\omega^2,\\ C &= \omega^2(l\omega + m)^2,\\ F &= \omega R(l\omega + m) + c\omega(l\omega + m),\\ H &= R(g\omega + l) + b\omega^2(g\omega + l),\\ G &= \omega(g\omega + l)(l\omega + m) + S, \end{aligned}$$

20. On forme $-\frac{\theta}{2}$, et l'on trouve pour l'identité $-\frac{\theta}{2} = fx - \varphi$,

$$-\varphi = [l^2 b + g(gm - fl)]\omega^2 + [bcl + (f - l)(gm - fl)]\omega + [l^2 c + m(gm - fl)].$$

La constante k de l'identité $\delta = kf^2$ est du quatrième degré en a, b, ...; elle ne diffère que par un facteur numérique du discriminant Δ de la quadrique, puisque δ s'annule évidemment avec Δ. L'examen d'un cas simple (soit $b = 0$, $c = 0$, $f \equiv 2R\omega^2$) donne

$$-k = \Delta = (gm - fl)^2 - bcl^2.$$

On forme encore θ'.

21. La première des identités (I) exige d'abord que le polynome $\varphi^2 - k\theta'$ n'ait pas de terme en ω^4 ni de terme indépendant; cela donne

$$bl^2[bl^2 + 2g(gm - fl) + cg^2] = 0,$$
$$cl^2[cl^2 + 2m(gm - fl) + bm^2] = 0.$$

Je me suis borné à considérer la solution

$$bl^2 + cg^2 = -2g(gm - fl),$$
$$bm^2 + cl^2 = -2m(gm - fl);$$

j'ai écarté pour cette solution l'hypothèse

$$l^2 = mg, \qquad bm + cg = -2(gm - fl),$$

et j'ai pris seulement

$$\text{(A)} \qquad \frac{b}{g} = \frac{c}{m} = \frac{-2(gm - fl)}{gm + l^2},$$

b et c étant ainsi proportionnels à g et m.

22. Cela introduit partout le binome $(g\omega^2 + m)$, et la première des identités (I) est satisfaite, avec

$$k' = -2lk.$$

La seconde exige simplement

$$l^2(gm + l^2) = gm(gm - fl); \tag{B}$$

on a alors

$$\frac{b}{g} = \frac{c}{m} = \frac{-2l^2}{gm}. \tag{A'}$$

En faisant $l = 1$, et en remplaçant m et g par $-A$, $-D$, l'équation (E) devient

$$\mathrm{AD}(x - \mathrm{A}y)(t - \mathrm{D}z) - (y - \mathrm{A}z)(z - \mathrm{D}y) = 0. \tag{E'}$$

Telle est l'équation définitive de la quadrique.

Les génératrices sont en évidence, et l'on vérifie aisément que les conditions (c) du n° 1 sont satisfaites; les paramètres des 4 points qui figurent dans ces conditions sont donnés par ce Tableau :

$$\begin{array}{cc|cc} \mathrm{M} \text{ ou } \mathcal{O}, & \mathrm{M}' \text{ ou } \mathcal{A}, & 0, & \infty, \\ \mathrm{N}, & \mathrm{N}', & \mathrm{A}, & \dfrac{1}{\mathrm{D}}. \end{array}$$

Je ferai observer que la relation (B) peut prendre la forme

$$-\frac{fl}{gm} = \left(\frac{l^2}{gm} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{l^2}{gm} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

23. L'équation tangentielle de la quadrique est

$$\begin{aligned} \mathrm{AD}[(\mathrm{A}u + v) + \mathrm{D}(\mathrm{D}r + w)]\,[\mathrm{A}(\mathrm{A}u + v) + (\mathrm{D}r + w)] \\ - (1 - \mathrm{AD})^2 ur = 0. \end{aligned}$$

La relation triplement quadratique et symétrique entre les paramètres des points O, A, B, le plan OAB étant tangent à Q, s'obtient en faisant dans l'équation précédente

$$u = 1, \qquad v = -(\omega + \alpha + \beta), \qquad \ldots, \qquad r = -\omega\alpha\beta.$$

Si l'on suppose ω et α donnés, cette relation est une équation du second degré en β, ayant pour racines β et ε; on a ainsi

$$\beta \times \varepsilon = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\alpha - A}{D\alpha - 1},$$

$$\beta + \varepsilon = \frac{(\omega - A)(\alpha - A)(D\omega - 1)(D\alpha - 1) + (\omega, \alpha)^2 - \dfrac{(1 - AD)^2}{AD}\,\omega\alpha}{(\omega, \alpha)(D\omega - 1)(D\alpha - 1)},$$

en posant

$$(\omega, \alpha) = D\omega\alpha - (\omega + \alpha) + A.$$