NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. HUMBERT

Sur la résolution algébrique de l'équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 193-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__193_1>

[A3k]

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. HUMBERT.

La relation algébrique qui lie $p\frac{u}{2}$ et pu conduit, pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré, à une formule remarquablement symétrique. J'établirai d'abord une expression, qui me semble nouvelle, de $p\frac{u}{2}$ en fonction de $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$; c'est la suivante :

$$(1) \qquad p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\sigma_1 u + e_2(e_3-e_1)\sigma_2 u + e_3(e_1-e_2)\sigma_3 u}{(e_2-e_3)\sigma_1 u + (e_3-e_1)\sigma_2 u + (e_1-e_2)\sigma_3 u},$$

ou, ce qui revient au même, en posant comme d'ordinaire $\sigma_{\alpha 0} u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$,

$$(2) \qquad p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\sigma_{10} u + e_2(e_3-e_1)\sigma_{20} u + e_3(e_1-e_2)\sigma_{30} u}{(e_2-e_3)\sigma_{10} u + (e_3-e_1)\sigma_{20} u + (e_1-e_2)\sigma_{30} u}.$$

Désignons par $\varphi(u)$ et $f(u)$ le numérateur et le dénominateur du second membre; ce sont des fonctions elliptiques de u, aux périodes $4\omega_1$, $4\omega_2$, et dont les seuls pôles possibles, d'ordre *un* au plus, sont, dans un parallélogramme des périodes, les points 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$. Or le point $u = 0$ n'est pôle ni pour $\varphi(u)$, ni pour $f(u)$; on a en effet, aux environs de ce point,

$$\sigma_{\alpha 0} u = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} e_\alpha u + \left(\frac{1}{40} g_2 - \frac{1}{8} e_\alpha^2\right) u^3$$
$$+ \left(\frac{1}{56} g_3 + \frac{1}{80} g_2 e_\alpha - \frac{1}{16} e_\alpha^3\right) u^5 + \ldots,$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} u \;\Sigma e_\alpha^2 (e_\beta - e_\gamma) + u^5(\quad) + \ldots,$$

$$f(u) = -\frac{1}{8} u^3 \,\Sigma e_\alpha^2 (e_\beta - e_\gamma) + u^7(\quad) + \ldots.$$

Ainsi les termes en $\frac{1}{u}$ ont disparu dans $\varphi(u)$ et $f(u)$; de plus $f(u)$ ne contient pas de termes en u et en u^5, et $\varphi(u)$ pas de terme en u^3.

On en conclut que $\varphi(u)$ et $f(u)$ n'ont, comme pôles, que les pôles simples $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; ce sont donc des fonctions d'ordre *trois*, et le seul zéro de $f(u)$, dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine, est dès lors le zéro triple $u = 0$.

D'après cela, le quotient $\varphi(u) : f(u)$ n'admet, dans ce parallélogramme, qu'un seul pôle, $u = 0$, qui est double; et les formules précédentes donnent, autour de ce point,

$$(3) \qquad \frac{\varphi(u)}{f(u)} = \frac{4}{u^2} + \lambda u^2 + \ldots.$$

Il n'y a pas de terme constant, parce que les termes en u^3 et u^5 manquent respectivement dans $\varphi(u)$ et $f(u)$.

Il en résulte immédiatement que la différence

$$\wp\frac{u}{2}-\frac{\varphi(u)}{f(u)},$$

qui est une fonction elliptique aux périodes $4\omega_1$, $4\omega_2$, n'a pas de pôle dans un parallélogramme contenant l'origine; c'est donc une constante, et, en vertu de (3), une constante nulle. C. Q. F. D.

Cela posé, si l'on donne $\wp u$, les valeurs de $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$ sont les quatre quantités

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right),\quad \wp\left(\frac{u}{2}+\omega_1\right),\quad \wp\left(\frac{u}{2}+\omega_2\right),\quad \wp\left(\frac{u}{2}+\omega_3\right).$$

Or la formule (2), si l'on y remplace u par $u+2\omega_\alpha$, garde la même forme, à cela près que $\sigma_{\beta 0}u$ et $\sigma_{\gamma 0}u$ changent tous deux de signe; ou encore que $\sigma_{\alpha 0}u$ change seul de signe. Il en résulte, puisque $\sigma_{\alpha 0}u=\sqrt{\wp u-e_\alpha}$, que les quatre valeurs de $\wp\frac{u}{2}$, en fonction de $\wp u$, sont données par la formule

$$\wp\frac{u}{2}=\frac{e_1(e_2-e_3)\sqrt{\wp u-e_1}+e_2(e_3-e_1)\sqrt{\wp u-e_2}+e_3(e_1-e_2)\sqrt{\wp u-e_3}}{(e_2-e_3)\sqrt{\wp u-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{\wp u-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{\wp u-e_3}},$$

où les trois radicaux prennent tous les signes possibles, le signe de chacun d'eux étant d'ailleurs le même au numérateur et au dénominateur.

Si maintenant, dans l'équation classique qui lie $\wp u$ et $\wp\frac{u}{2}$, on pose $\wp u=a$, $\wp\frac{u}{2}=x$, cette équation s'écrit

$$4(2x+a)(4x^3-g_2x-g_3)=\left(6x^2-\frac{1}{2}g_2\right)^2$$

ou

$$4x^4-16ax^3+2g_2x^2+4x(2g_3+ag_2)+\frac{1}{4}g_2^2+4ag_3=0.$$

Posons-y, pour faire disparaître le terme en x^3,

$$x = \xi + a,$$

il vient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &4\xi^4 + 2\xi^2(g_2 - 12a^2)\\ &\quad + 8\xi(-4a^3 + g_2 a + g_3)\\ &\quad - 12a^4 + 6a^2 g_2 + 12 a g_3 + \frac{1}{4} g_2^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Soit, en général, une équation du type

$$(5)\qquad \xi^4 + 6A\xi^2 + 4B\xi + C = 0;$$

on la ramènera au type (4) en posant

$$\begin{aligned} g_2 - 12\,a^2 &= 12\,A,\\ g_3 + \quad a g_2 - \ 4\,a^3 &= \ 2B,\\ -12a^4 + 6a^2 g_2 + 12 a g_3 + \frac{1}{4} g_2^2 &= \ 4C,\end{aligned}$$

ce qui donne, pour a, g_2 et g_3, les valeurs

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{6B}(C - 9A^2),\\ g_2 &= 12(A + a^2),\\ g_3 &= 2B - 12Aa - 8a^3.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, étant donnée l'équation (5), pour la résoudre algébriquement, on formera, par (6), les quantités a, g_2, g_3; on calculera les racines e_1, e_2, e_3 de la *résolvante du troisième ordre* $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$; et l'on aura, pour les quatre racines cherchées, la formule

$$\xi = -a + \frac{e_1(e_2 - e_3)\sqrt{a - e_1} + e_2(e_3 - e_1)\sqrt{a - e_2} + e_3(e_1 - e_2)\sqrt{a - e_3}}{(e_2 - e_3)\sqrt{a - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{a - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{a - e_3}},$$

où les trois radicaux prennent tous les signes possibles, le signe de chacun d'eux étant le même au numérateur et au dénominateur.