NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. RICHARD

Sur les fonctions discontinues croissantes et sur certaines fonctions continues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 156-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__156_1>

[D1a]

SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES CROISSANTES ET SUR CERTAINES FONCTIONS CONTINUES;

PAR M. J. RICHARD,
Professeur à Dijon.

Je vais montrer dans ce qui suit, qu'une fonction discontinue constamment croissante (ou décroissante) dans un intervalle (a, b) peut être mise sous la forme d'une somme de deux fonctions, l'une discontinue d'une certaine espèce, et l'autre continue.

I. Les points de l'intervalle (a, b) où la fonction $f(x)$ considérée n'est pas continue forment un ensemble dénombrable.

Pour le démontrer, supposons que la fonction soit discontinue pour $x = x_0$, $f(x_0 - h)$ croît quand h diminue, et comme il ne peut dépasser $f(x_0)$, il tend vers une limite que, selon l'usage, nous désignons par $f(x_0 - 0)$. De même $f(x_0 + h)$ tend vers une limite $f(x_0 + 0)$. La différence $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ est ce que je nommerai le *saut* de la fonction pour $x = x_0$. La connaissance de $f(x + 0)$ et de $f(x - 0)$ ne fait pas connaître $f(x)$. On peut supposer que $f(x)$ est la moyenne entre $f(x + 0)$ et $f(x - 0)$. Cela ne change pas la définition de $f(x)$ partout où elle est continue.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Les points où le saut surpasse ε forment un ensemble fini, car si le nombre de ces points surpasse n, $f(b) - f(a)$ est plus grand que $n\varepsilon$: or $f(b) - f(a)$ est fini, il ne peut surpasser $n\varepsilon$ quelque grand que soit n.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ une suite de nombres positifs ayant pour limite zéro. Rangeons par ordre de grandeur les valeurs de x pour lesquelles le saut surpasse ε_1, puis celles pour lesquelles le saut est compris entre ε_1 et ε_2, puis celles pour lesquelles le saut est compris entre ε_2 et ε_3, etc. On a ainsi rangé toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est discontinue. Ces valeurs forment donc un ensemble dénombrable.

II. Nous pouvons alors désigner par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs de x pour lesquelles la fonction est discontinue : soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les sauts correspondants; la série $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ est certainement convergente, car elle est à termes positifs, et la somme des n premiers termes ne saurait surpasser $f(b) - f(a)$. Soit alors $\varphi(x)$ une fonction définie comme il suit : $\varphi(x)$ est nul pour x négatif, égal à $\frac{1}{2}$ pour $x = 0$, égal à 1 pour x positif.

Considérons maintenant la fonction

$$\psi(x) = u_1\,\varphi(x - x_1) + u_2\,\varphi(x - x_2) + u_3\,\varphi(x - x_3) + \ldots + u_n\,\varphi(x - x_n) + \ldots.$$

Je vais montrer que $f(x) - \psi(x)$ est continue.

D'abord si x n'est égal ni à x_1, ni à x_2, ..., ni à x_n, $\psi(x)$ est continue, car c'est une série *uniformément convergente*, dont tous les termes sont des fonctions continues.

Pour $x = x_n$, $u_n\,\varphi(x - x_n)$ est le seul terme discontinu. Pour $x < x_n$ il est égal à zéro, pour $x = x_n$ il est $\frac{u_n}{2}$, pour $x > x_n$ il est u_n. Donc le saut de $\psi(x)$ pour $x = x_n$ est bien égal à u_n et en outre, $\psi(x_n)$ est bien la moyenne entre $\psi(x_n - 0)$ et $\psi(x_n + 0)$.

Alors $f(x) - \psi(x)$ ne subit aucun saut pour $x = x_n$, c'est une fonction continue $S(x)$ et l'on peut écrire

$$f(x) = \psi(x) + S(x).$$

On peut énoncer ceci sous la forme suivante. Toute fonction discontinue croissante $f(x)$ est la somme d'une fonction continue $S(x)$ et d'une fonction $\psi(x)$ complètement définie par les sauts qu'elle éprouve pour les diverses valeurs de x.

$f(x)$ est toujours intégrable, puisque les points où le saut est supérieur à ε forment un ensemble fini; on peut écrire :

$$\int f(x)\,dx = \int \psi(x)\,dx + \int S(x)\,dx.$$

Il est alors facile de voir que la fonction $\int f(x)\,dx$ n'a pas de dérivée pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais en possède une pour les autres valeurs de x.

On forme ainsi une fonction croissante telle qu'il existe dans l'intervalle (a, b) une infinité de valeurs pour lesquelles cette fonction n'a pas de dérivée, $\int S(x)\,dx$ a toujours une dérivée $S(x)$.

On connaît des fonctions continues n'ayant de dérivée pour aucune valeur de x; je ne crois pas qu'on connaisse des fonctions continues *croissantes* possédant la même propriété.

Je vais maintenant considérer des fonctions *continues* de nature particulière.

Je dirai que $f(x)$ est convexe dans l'intervalle (a, b), si, quels que soient m et n, l'équation $f(x) = mx + n$ n'a jamais plus de deux racines. Géométriquement l'arc de courbe $y = f(x)$ $(a < x < b)$ ne peut être coupé par une droite quelconque en plus de deux points.

Dans ces conditions, je vais faire voir que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a une limite quand h tend vers zéro par valeurs positives (on verra de même qu'il en a une quand h tend vers zéro par valeurs négatives).

Des considérations géométriques rendront la démonstration plus facile, sans nuire à sa rigueur.

Soit x_0 un point quelconque de la courbe, x un autre point à droite $x = x_0 + h$. Je dis que h diminuant, le quotient de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ par h varie constamment dans le même sens. La droite $x_0 x$ a précisément ce quotient pour coefficient angulaire. S'il ne variait pas toujours dans le même sens quand h diminue, on pourrait trouver trois points α, β, γ $(x_0 < \alpha < \beta < \gamma)$ tels que la droite $x_0\beta$ ne soit pas comprise dans l'angle de $x_0\alpha$ avec $x_0\gamma$, alors l'arc de courbe $y = f(x)$ compris entre $x = \alpha$, $x = \gamma$ aurait des points non situés dans l'angle considéré, il devrait donc couper l'un des côtés de cet angle. La courbe couperait ainsi l'un des côtés de l'angle en trois points : le point x_0, l'un des deux points α ou γ, et un autre point entre α et γ, ce qui est contraire à notre hypothèse.

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ variant constamment dans le même sens tend vers une limite pour $h=0$ [il peut aussi devenir infini, mais dans ce cas encore la courbe $y=f(x)$ admet au point x_0 une tangente qui est verticale].

La courbe est donc telle qu'en tous ses points il y ait une dérivée à gauche et une dérivée à droite; elle présente en chaque point un point angulaire avec deux tangentes déterminées.

Il sera ensuite facile de démontrer que les points où l'angle de ces deux tangentes surpasse une certaine limite ε sont en nombre fini, et que par suite les points où les deux tangentes ne coïncident pas forment un ensemble dénombrable.