A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1903). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 117-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__117_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1903). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On considère une droite fixe A *et deux droites fixes* B *et* B′ *qui rencontrent* A *mais qui ne sont pas situées dans un même plan.*

On sait que si l'on considère une surface du second ordre S *qui passe par les trois droites* A, B *et* B′, *son centre* C *est situé dans le plan* P *parallèle aux droites* B *et* B′ *et équidistant de ces deux droites.*

1° *Lorsque le centre* C *décrit une droite dans le plan* P, *la surface* S *passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur* B *et* B′;

2° *Lorsque le point* C *décrit, dans le plan* P, *une courbe* (Γ) *de classe* m, *la surface* S *enveloppe une surface réglée* Σ *d'ordre* $2m$ *et, par chacune des trois droites* A, B *et* B′, *il passe* m *nappes de cette surface* Σ.

Montrer que la surface Σ *peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites* B *et* B′ *et en restant tangente à un* *cylindre de classe m dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre;*

3° *Dans le cas particulier où la courbe* (Γ) *est une conique, la surface* Σ *est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double.*

Tout plan passant par A coupe alors cette surface, en dehors de A, suivant une conique; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) *est tangente soit au plan déterminé par les droites A et B, soit au plan déterminé par A et B', soit à ces deux plans à la fois?*

NOTA. — *Les candidats devront traiter le problème par la Géométrie analytique : il leur sera tenu compte des remarques géométriques.*

I. — SOLUTION ANALYTIQUE.

La droite A sera prise pour axe des z; l'origine des coordonnées sera le milieu O du segment $B_1 B'_1 = 2c$ déterminé sur A par les droites B et B'; les axes Ox, Oy seront les parallèles aux droites B, B' menées par O, de sorte que les équations des droites A, B, B' seront

$$(A) \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} y = 0, \\ z = c: \end{cases}$$

$$(B') \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = -c. \end{cases}$$

L'équation d'une quadrique passant par Oz est

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y = 0.$$

Pour que cette quadrique passe par les droites B et B', il faut

$$A = 0, \qquad B'c + C = 0; \qquad A' = 0, \qquad -Bc + C' = 0.$$

L'équation d'une quadrique S passant par les droites A, B, B' est donc :

$$Byz + B'zx + B''xy - B'cx + Bcy = 0.$$

Le centre C d'une telle quadrique est défini par les équations :

$$\begin{aligned} B'z + B''y - B'c &= 0, \\ Bz + B''x + Bc &= 0, \\ By + B'x &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de ces équations respectivement par B, B', — B'' et ajoutant, on obtient :

$$2BB'z = 0$$

ou

$$z = 0,$$

en supposant $BB' \neq 0$; ce qui prouve que le centre C de S est dans le plan xOy ou P parallèle aux droites B, B' et équidistant de ces droites. Les coordonnées x, y de C se déduisent des équations :

$$\begin{gathered} By + B'x = 0, \\ B''(By - B'x) - 2BB'c = 0, \end{gathered}$$

ou, en supposant $B'' \neq 0$,

$$\begin{aligned} By + B'x &= 0, \\ By - B'x &= \frac{2BB'}{B''}c. \end{aligned}$$

On en déduit, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{B}{B''}c, \\ y &= \frac{B'}{B''}c. \end{aligned}$$

L'hypothèse $BB'B'' \neq 0$ signifie que S n'est pas un paraboloïde; dans le cas du paraboloïde, C serait à l'infini; on peut supposer $BB'B'' \neq 0$.

En désignant par α et β les coordonnées du point C dans le plan xOy, on a

$$B = -\frac{B''\alpha}{c}, \qquad B' = \frac{B''\beta}{c};$$

par suite l'équation de S devient, en y remplaçant B, B' par les valeurs précédentes, supprimant le facteur B'' et changeant les signes :

$$(S) \qquad \alpha yz - \beta zx - cxy + c\beta x + c\alpha y = 0.$$

1° Si le point C décrit dans le plan xOy une droite D ayant pour équation

$$(D) \qquad u_0 x + v_0 y + 1 = 0,$$

on aura :

$$u_0 \alpha + v_0 \beta + 1 = 0.$$

L'équation de S peut s'écrire

$$\alpha y(z + c) + \beta x(c - z) + (u_0 \alpha + v_0 \beta) cxy = 0,$$

ou

$$\alpha y(z + c + cu_0 x) + \beta x(c - z + cv_0 y) = 0.$$

On voit, sur cette équation, que la surface S passe par une quatrième droite fixe A' représentée par les équations

$$(A') \qquad \begin{cases} z + c + cu_0 x = 0, \\ c - z + cv_0 y = 0, \end{cases}$$

et s'appuyant sur B et B'.

Le plan projetant la droite A' sur le plan xOy parallèlement à Oz a pour équation

$$(D') \qquad u_0 x + v_0 y + 2 = 0.$$

Sa trace, sur le plan xOy, est une droite D' homothétique de D, le centre d'homothétie étant O, et le rapport d'homothétie de D' à D étant 2. Ainsi la droite A' s'obtiendra en joignant les points d'intersection H, H' du plan (D') avec les droites B et B'.

2° Supposons que le point C décrive dans le plan xOy une courbe (Γ), de classe m, ayant pour équation en coordonnées tangentielles et homogènes

$$(\Gamma) \qquad \varphi(u, v, w) = 0,$$

de degré m. Désignons par $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ l'équation de (Γ) en coordonnées ponctuelles homogènes. Pour trouver l'enveloppe de la surface S, il faut éliminer α, β, γ entre les équations :

$$(S) \qquad \alpha y(z+c) + \beta x(c-z) - \gamma cxy = 0,$$

$$(1) \qquad \frac{y(z+c)}{f'_\alpha} = \frac{x(c-z)}{f'_\beta} = \frac{-cxy}{f'_\gamma}.$$

Les deux dernières équations représentent une droite s'appuyant sur les droites B, B'; l'enveloppe est donc une surface réglée Σ engendrée par cette droite; cela était à prévoir, car deux surfaces S ayant 3 droites communes A, B, B' en ont une quatrième s'appuyant, comme A, sur B et B'.

Or si l'on pose

$$u = y(z+c), \qquad v = x(c-z), \qquad w = -cxy,$$

pour trouver l'équation de Σ, on doit éliminer α, β, γ entre les équations :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

$$\frac{u}{f'_\alpha} = \frac{v}{f'_\beta} = \frac{w}{f'_\gamma},$$

et le résultat de l'élimination sera l'équation tangentielle de la courbe (Γ), savoir

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

Donc l'équation ponctuelle de Σ sera

$$(\Sigma) \qquad \varphi[y(z + c), x(c - z), -cxy] = 0,$$

c'est-à-dire une surface d'ordre $2m$, passant par chacune des droites A, B, B'. Si l'on coupe Σ par un plan $z = h$ on obtient une courbe qui se projette en vraie grandeur sur le plan xOy parallèlement à Oz; cette projection a pour équation

$$\varphi[y(h + c), x(x - h), -cxy] = 0,$$

de degré $2m$; les termes de moindre degré étant de degré m, le point de rencontre de A et du plan $z = h$ est un point multiple d'ordre m de la section; donc par la droite A, il passe m nappes de la surface Σ. On voit de même que par chacune des droites B, B' il passe m nappes de Σ.

L'équation $\varphi(u, v, w) = 0$ étant homogène, on voit que l'équation (Σ) peut s'écrire

$$\varphi\left(\frac{z + c}{-cx}, \frac{c - z}{-cy}, 1\right) = 0,$$

ou

$$\varphi(\lambda, \mu, 1) = 0,$$

en posant

$$\frac{z + c}{-cx} = \lambda, \quad \frac{c - z}{-cy} = \mu,$$

c'est-à-dire

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} z + c + \lambda c y = 0, \\ z - c - \mu c y = 0. \end{cases}$$

Ces équations représentent une droite Δ s'appuyant sur B et B'. La surface Σ est engendrée par cette droite Δ. La projection δ' de Δ sur xOy a pour équation

$$(\delta') \qquad \lambda x + \mu y + 2 = 0.$$

Ses coordonnées sont

$$u' = \lambda, \qquad v' = \mu, \qquad w' = 2.$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{2u'}{w'}, \qquad \mu = \frac{2v'}{w'}.$$

Donc la droite δ' enveloppe une courbe ayant pour équation tangentielle

$$\varphi\left(\frac{2u'}{w'}, \frac{2v'}{w'}, 1\right) = 0,$$

ou

$$(\Gamma') \qquad \varphi(2u', 2v', w') = 0,$$

ce qui montre que la droite Δ, génératrice de Σ, reste tangente à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz ou A et dont la base, dans le plan xOy, a pour équation tangentielle (Γ'), de degré m; ce cylindre est donc de classe m. L'équation ponctuelle de ce cylindre est la même que l'équation ponctuelle de la courbe (Γ'); or les courbes (Γ) et (Γ') sont homothétiques par rapport au point O, le rapport d'homothétie de (Γ') à (Γ) étant 2. Si

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

est l'équation ponctuelle de (Γ) en coordonnées non homogènes, celle du cylindre (Γ') sera

$$f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 0.$$

3° Si la courbe (Γ) est une conique ayant pour équation tangentielle

$$\varphi(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

la surface Σ est du quatrième ordre et a pour équation ponctuelle :

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{l} ay^2(c+z)^2+a'x^2(c-z)^2 \\ \quad +a''c^2x^2y^2-2bcx^2y(c-z) \\ \quad -2b'cxy^2(c+z)+2b''xy(c-z)(c+z)=0. \end{array}\right.$$

Cette surface Σ_1 admet les droites A, B, B′ comme droites doubles et un plan ϖ

$$y-mx=0,$$

passant par Oz coupe Σ_1, en dehors de A, suivant une conique (C_1) intersection du plan ϖ et du cylindre

$$\begin{array}{l} am^2(c+z)^2+a'(c-z)^2 \\ \quad +a''c^2m^2x^2-2bcmx(c-z) \\ \quad -2b'cm^2x(c+z)+2b''m(c-z)(c+z)=0. \end{array}$$

Les équations du centre de cette conique sont

$$y-mx=0,$$
$$a''c^2m^2x-bcm(c-z)-bc'b'cm^2(c+z)=0,$$
$$am^2(c+z)-a'(c-z)+bcmx-b'cm^2x-2b''mz=0,$$

ou

$$(2)\left\{\begin{array}{c} y=mx, \\ a''cmx+(b-b'm)z=c(b+b'm), \\ cm(b-b'm)x+(am^2-2b''m+a')z=c(a'-am^2). \end{array}\right.$$

Ces équations permettent d'exprimer les coordonnées x, y, z d'un point du lieu en fonction du paramètre m; en résolvant les deux dernières par rapport à x et z, on obtient :

$$x=\frac{c[(b+b'm)(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)(a'-am^2)]}{cm[a''(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)^2]},$$

ou

$$x=\frac{b(2am^2-2b''m)+b'm(-2b''m+2a')}{m[a''(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)^2]},$$

$$z=\frac{c^2m[a''(a'-am^2)-(b^2-b'^2m^2)]}{cm[a''(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)^2]}.$$

Si l'on désigne par A, A′, A″, B, B′, B″ les coefficients de a, a', a'', b, b', b'' dans le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$\begin{array}{lll} A = a'a'' - b^2, & A' = aa'' - b'^2, & A'' = aa' - b''^2 \\ B = b'b'' - ab, & B' = bb'' - a'b', & B'' = bb' - a''b'', \end{array}$$

les équations du lieu s'écrivent :

$$(\sigma) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-2Bm - 2B'}{A'm^2 + 2B''m + A}, \\ z = \dfrac{c(A - A'm^2)}{A'm^2 + 2B''m + A}, \\ y = mx. \end{cases}$$

Ces équations représentent une conique (σ) dont la projection sur le plan xOy, parallèlement à Oz, a pour équation

$$(\sigma_1) \qquad A'y^2 + 2B''xy + Ax^2 + 2By + 2B'x = 0.$$

Or l'équation ponctuelle de (Γ) est

$$Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0.$$

La conique (σ_1) est donc homothétique et concentrique à la conique (Γ).

Pour $m = 0$, on a

$$y = 0, \qquad x = -\frac{2B'}{A}, \qquad z = c,$$

c'est-à-dire un point H_1 de la droite B se projetant sur xOy au deuxième point de rencontre h_1 de la conique (σ_1) avec Ox; de même (σ) rencontre la droite B′ au point H'_1 se projetant sur xOy au deuxième point de rencontre h'_1 de (σ_1) avec Oy. Pour $m = -\frac{B'}{B}$ on a

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{c(AB^2 - A'B'^2)}{A'B'^2 - 2BB'B'' + AB^2},$$

c'est-à-dire un point A_1 de la droite A. Le plan de la conique (σ) est défini par ces trois points H_1, H'_1 et A_1.

Si la conique (Γ) est tangente au plan (A, B) ou $y = 0$, elle est tangente à la droite $y = 0$ et l'on doit avoir $a' = 0$. Si la conique Γ est tangente au plan (A, B') ou $x = 0$, on aura

$$a = 0.$$

La surface Σ_1 se décompose, suivant l'un ou l'autre cas, dans

$$y = 0 \qquad [\text{plan}\,(A, B)]$$

et une surface du troisième ordre

$$(\Sigma_2) \quad \left\{ \begin{aligned} & ay(c+z)^2 + a''c^2x^2y - 2bcx^2(c-z) \\ & \quad - 2b'cxy(c+z) + 2b''x(c-z)(c+z) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou dans

$$x = 0 \qquad [\text{plan}\,(A, B')]$$

et une surface du troisième ordre

$$(\Sigma_3) \quad \left\{ \begin{aligned} & a'x(c-z)^2 + a''c^2xy^2 - 2bcxy(c-z) \\ & \quad - 2b'cy^2(c+z) + 2b''y(c-z)(c+z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Tout plan passant par A,

$$y - mx = 0,$$

coupe Σ_2 ou Σ_3 suivant une conique dont le lieu des centres est encore une conique (σ).

Si la conique (Γ) est tangente à la fois aux plans (A, B) et (A, B') on a en même temps

$$a' = 0, \qquad a = 0.$$

La surface Σ_1 se décompose dans ces deux plans $y = 0$ et $x = 0$, et une quadrique

$$(\Sigma_4) \quad \left\{ \begin{aligned} & a'' c^2 xy - 2bcx(c - z) - 2b'cy(c + z) \\ & \qquad\qquad + 2b''(c - z)(c + z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Tout plan $y - mx = 0$ passant par la droite A coupe Σ_4 suivant une conique, car A n'est pas situé sur Σ_4, et le lieu des centres de cette conique est encore une conique (σ). Dans ce cas, on peut ajouter que le plan de (σ) est le plan diamétral conjugué de la direction A dans la quadrique Σ_4. Les droites B et B' appartiennent à cette quadrique. Le point A_1 se confond avec O.

II. — Considérations géométriques.

On peut établir par la géométrie presque tous les résultats demandés.

1° Soit D la droite décrite par les centres des quadriques S, et D' l'homothétique de D, par rapport à O, le rapport d'homothétie de D' à D étant 2. La quadrique S admettant pour centre un point C de D passe par la droite A_1 symétrique de A par rapport à C; le plan (A_1, D') coupe S suivant une deuxième droite A' qui est fixe quand C varie, car le plan (A_1, D') qui passe par D' et qui est parallèle à A est fixe, et la droite A' passe par les points de rencontre H et H' de ce plan avec les droites B et B'.

2° Considérons la tangente δ en un point C de la courbe (Γ); quand C décrit δ, les surfaces S passent (1°) par une quatrième droite fixe Δ dont la projection sur xOy parallèlement à A est une droite δ' homothétique de δ par rapport à O, le rapport d'homothétie de δ' à δ étant 2; la droite δ' est tangente à la courbe (Γ') homothétique de (Γ) au point C' homologue de C. Quand le point C varie très peu sur Γ et vient en C_1, la droite Δ varie très peu; les deux surfaces voisines S et S_1 ont deux génératrices voisines Δ et Δ_1 qui se confondent quand C_1 vient en C; or, les deux quadriques S et S_1 passant par les droites fixes A, B, B' ont comme intersection variable une quatrième droite dont la position limite est Δ quand S et S_1 se confondent; donc l'enveloppe Σ des surfaces S est engendrée par la droite Δ rencontrant B et B', et se projetant sur le plan P parallèlement à A suivant une tangente δ' à la courbe (Γ'), c'est-à-dire par la droite Δ rencontrant B, B' et restant tangente au cylindre dont les génératrices sont parallèles à A et qui a pour base la courbe (Γ') du plan xOy ou P. Les courbes (Γ) et (Γ') étant homothétiques sont de même classe m; par suite, le cylindre (Γ') est aussi de classe m. De ce mode de génération de Σ, il résulte aisément que la section de Σ par un plan passant par A se compose de cette droite A comptée m fois et d'une courbe de degré m, ce qui montre que Σ est d'ordre $2m$. Le raisonnement est analogue à celui que nous allons indiquer dans le cas particulier $m = 2$.

3° Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique ($m = 2$), la surface Σ est une surface du quatrième ordre Σ_1, car tout plan ϖ passant par Oz ou A la coupe en suivant une conique (γ) et la droite Oz qui doit être comptée comme double; en effet, un plan tangent δ' au cylindre (Γ') coupe le plan ϖ suivant une droite $z_1 z'_1$ parallèle à Oz, et sur cette droite il y a deux points de la section et pas davantage, car par $z_1 z'_1$ on peut mener deux plans tangents au cylindre (Γ') et dans chacun d'eux il y a une droite Δ. La droite Δ se confond avec zz' quand le plan tangent δ' passe par Oz, ce qui arrive deux fois; donc Oz est une droite double de Σ_1. Par un point H de la droite B, il passe deux génératrices Δ; de même par un point H' de B'; donc B et B' sont aussi des droites doubles de Σ_1.

La trace OM du plan ϖ sur xOy coupe (Γ') en m_1 et m_2 et $z_1 z'_1$ en m; quand le point m en décrivant OM vient en m_1 ou m_2, les droites $z_1 z'_1$ sont des tangentes parallèles à la conique (γ) aux points M_1 et M_2; le centre ω de cette conique est le milieu du segment $M_1 M_2$; donc le lieu de ω se projette sur xOy suivant le lieu du milieu ω_1 de $m_1 m_2$. Soit O' le centre de (Γ'). Les droites $O\omega_1$ et $O'\omega_1$ étant parallèles à deux diamètres conjugués de la conique (Γ') engendrent deux faisceaux homographiques et le lieu de ω_1 est une conique (σ_1) passant par O et O'; les tangentes en ces points sont parallèles à la direction conjuguée de OO' dans la conique (Γ'); par suite le centre de (σ_1) est le milieu O_1 de OO', c'est-à-dire le centre de (Γ). Les deux coniques (σ_1) et (Γ') sont homothétiques, car elles ont, en direction, les mêmes systèmes de diamètres conjugués $O\omega_1$, $O'\omega_1$. Donc la conique (σ_1) est concentrique et homothétique à la conique (Γ). Sur toute génératrice du cylindre (σ_1), projetant la courbe, lieu de ω, il n'y a qu'un point de ce lieu qui est par suite une conique (σ) rencontrant les droites B, B' aux points H_1, H'_1 dont les projections sont les deuxièmes points de rencontre h_1, h'_1 de (σ_1) avec Ox, Oy; en effet, quand le plan ϖ coïncide avec zOx, la conique (γ) devient la droite double B admettant pour centres tous ses points; et l'on peut dire, par continuité, que le point ω vient en H_1, comme on l'a vu analytiquement. De même la conique (σ) passe par H'_1.

Si la conique (Γ) est tangente au plan (A, B) et, par suite, à Ox, il en est de même de (Γ'). Par un point H de la droite B, on peut mener deux plans tangents au cylindre (Γ'), mais l'un d'eux est toujours le plan zOx qui contient la droite Δ correspondante; l'autre plan tangent contient la deuxième droite Δ qui engendre une surface Σ_2 du troisième ordre admettant B' comme droite double, A et B comme droites simples. Dans ce cas la surface du quatrième ordre Σ_1 se décompose donc dans le plan (A, B) et la surface du troisième ordre Σ_2.

De même si (Γ) est tangente à Oy, la surface du quatrième ordre Σ_1 se décompose dans le plan (A, B') et une surface du troisième ordre Σ_3 admettant B comme droite double, A et B' comme droites simples.

Enfin si (Γ) est tangente à la fois à Ox et Oy, la surface Σ_1 se décompose dans les plans (A, B), (A, B') et une quadrique Σ_4 passant par les droites B, B', mais ne passant pas par A. Dans ce cas la génératrice Δ de Σ_4 est une tangente au cylindre (Γ') s'appuyant sur les tangentes B et B' à ce cylindre.