Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur un système articulé gauche

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 105-108

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__105_1>

[R1e]

SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ.

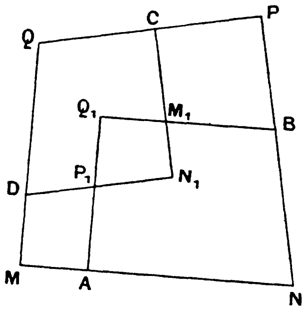
Dans un précédent Mémoire (¹) (*Nouvelles Annales*, décembre 1903 et janvier 1904) j'ai étudié le cas le plus remarquable du système articulé de M. Kempe, système dont les éléments sont des plaques triangulaires, susceptibles de dégénérer en de simples tiges. Je montrerai ici que, dans ce dernier cas, on peut substituer au système plan, qui a *un* paramètre de déformation, un système gauche ayant *deux* paramètres de déformation. Je conserve les notations du Mémoire cité.

1. Considérons (*fig.* 1) deux quadrilatères gauches articulés QPNM, QCN_1D, les tiges QP et QC restant confondues en direction, ainsi que les tiges QM et QD; si l'on relie par une tige deux points B et M_1 fixes sur PN et CN_1, *dans la déformation à deux paramètres du système obtenu*, un certain point A de la tige MN et un certain point P_1 de la tige DN_1 resteront à une distance constante l'un de l'autre. Les points A et P_1 sont déterminés par les conditions suivantes : les points A, B, C, D sont dans un même plan, ainsi que les points M, P_1, M_1, P. Je suis arrivé à ce résultat en considérant le triangle QNN_1.

(¹) *Voir* t. III, 1903, p. 529.

Il est facile de voir que les droites BM_1 et AP_1 se rencontrent en un point Q_1, et que ce point est fixe

Fig. 1.



sur les tiges BM_1 et AP_1; les quatre points N, Q_1, N_1, Q sont d'ailleurs dans un même plan.

On peut dire :

Si l'on considère dans l'espace huit tiges

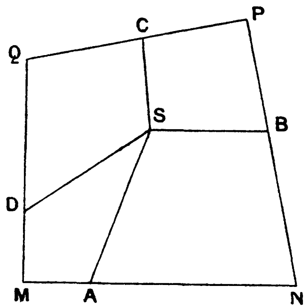
$$AMN, \quad BQ_1M_1, \quad CPQ, \quad DN_1P_1,$$
$$CM_1N_1, \quad DQM, \quad AP_1Q_1, \quad BNP,$$

formant deux tétrades et quatre couples, telles que deux tiges qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulées entre elles, le système est déformable avec deux paramètres sous une condition unique : les points d'articulation A, B, C, D *des deux quadrilatères* MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$ *doivent être dans un même plan, auquel cas il en est de même des points d'articulation des deux quadrilatères* MAP_1D *et* M_1CPB, *et de ceux des deux quadrilatères* NAQ_1B *et* N_1CQD.

On aurait trois points I, J, K analogues à ceux de la figure 10 du Mémoire cité.

2. Les quatre points M_1, N_1, P_1, Q_1 peuvent être confondus en un même point S (*fig.* 2); la théorie de

Fig. 2.



l'appareil est alors très simple, et si l'on pose

$$\begin{array}{lll} MN = a, & NB = b, & \ldots, \\ \dfrac{MA}{AN} = \dfrac{m}{n}, & \dfrac{NB}{BP} = \dfrac{n}{p}, & \ldots, \\ SA = \alpha, & SB = \beta, & \ldots, \end{array}$$

on a

$$\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)-\beta^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)+\ldots-\ldots$$
$$+\left(\frac{a^2}{m+n}-\frac{b^2}{n+p}+\ldots-\ldots\right)=0.$$

3. En conservant le point S, les quatre points A, B, C, D peuvent être à un cercle; la déformation du contour MNPQ les maintient sur un cercle, car, si l'on fait varier le dièdre MP sans modifier la longueur MP, en appelant J le point où AB et DC coupent MP, on a

$$JA.JB = JC.JD.$$

Comme on peut avoir alors $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, on a

$$\frac{a^2}{m+n}-\frac{b^2}{n+p}+\frac{c^2}{p+q}-\frac{d^2}{q+m}=0.$$

Si l'on regarde $m+n$, $n+p$, $p+q$ comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace, cette équation représente un cône du troisième ordre; ce cône a une génératrice double dans l'hypothèse

$$c+a=d+b(=l),$$

c'est-à-dire lorsque le contour MNPQ est circonscriptible à des sphères, et l'on a pour la génératrice double

$$\frac{m+n}{a}=\frac{n+p}{b}=\frac{p+q}{c}=\frac{q+m}{d}.$$

Si l'on adopte pour m, n, p, q des valeurs remplissant ces conditions, ce qui laisse un paramètre pour le système des points d'attache A, B, C, D, on a

$$\mathrm{NA}=\mathrm{NB}, \qquad \mathrm{PB}=\mathrm{PC}, \qquad \ldots;$$

on obtient les systèmes de points A, B, C, D en donnant au contour une forme déterminée, et en considérant les sphères qui touchent les quatre côtés : le lieu des centres de ces sphères est une droite, axe commun des cercles ABCD; en prenant pour S un point de cet axe, on aura

$$\mathrm{SA}=\mathrm{SB}=\mathrm{SC}=\mathrm{SD},$$

les points d'attache A, B, C, D étant tels qu'on l'a dit.

NOTE. — *Pourrait-on, avec des tétraèdres, obtenir un système articulé comparable au système plan de Kempe?* C'est une question que je ne puis étudier, faute de temps, et dont je serais heureux d'avoir provoqué la solution.