Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 83-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__83_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x \sin x + (a + bx^2) \cos x,$$

a et b étant des constantes données.

Quelle relation doit-il y avoir entre a et b pour que l'intégrale générale soit une fonction uniforme de x? Montrer que, dans ce cas, on peut obtenir l'expression de cette intégrale sous forme entièrement explicite, sans aucun signe de quadrature.

II. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient* M *un point d'une surface* (S), N *la projection de* M *sur le plan* xOy, P *et* Q *les points de rencontre du plan tangent en* M *à la surface* (S) *avec les axes* Ox *et* Oy *respectivement. On demande de trouver l'équation générale des surfaces* (S) *telles que l'on ait*

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{MN}}{a},$$

a étant une longueur donnée.

Déterminer les lignes asymptotiques de ces surfaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\int\int x^2 y \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, dx\, dy,$$

étendue à la région du plan définie par les inégalités

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad x^3 + y^3 \leqq 1.$$

(Octobre 1901.)

Marseille.

Épreuve écrite. — I. *On joint un point mobile* M *à deux points fixes* A_1 *et* A_2, *et l'on suppose que les directions* A_1M *et* A_2M *fassent avec une direction donnée* Ox *des angles* φ_1 *et* φ_2 *liés entre eux par la relation à coefficients constants*

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 = C.$$

On demande les trajectoires orthogonales des courbes que peut décrire le point M *quand le paramètre* C *varie.*

Étudier les cas particuliers où l'on a

$$k_1 + k_2 = 0 \qquad ou \qquad k_1 - k_2 = 0.$$

II. *On trace un axe quelconque* Oy *perpendiculaire à* Ox, *et l'on figure les points*

$$z = x + y\sqrt{-1}, \qquad a_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \qquad a_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1},$$

dont les deux derniers sont fixes. On demande de mettre l'expression à coefficients constants

$$u = k_1 \log(z - a_1) + k_2 \log(z - a_2),$$

sous la forme $X + Y\sqrt{-1}$, *où* X *et* Y *sont des fonctions réelles de* x *et de* y.

Expliquer comment les équations

$$X = \lambda, \qquad Y = \mu,$$

où λ *et* μ *sont des paramètres arbitraires, sont en relations avec le problème de Géométrie qui fait l'objet de la première question.*

Solution.

La relation

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 = C,$$

est équivalente à la relation

$$k_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{y - \beta_1}{x - \alpha_1} + k_2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y - \beta_2}{x - \alpha_2} = C.$$

La différentiation élimine C. Échangeant ensuite

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad -\frac{dx}{dy},$$

on a l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

L'intégration facile donne

$$\rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2} = C'.$$

Pour $k_1 - k_2 = 0$, on a

$$\rho_1\rho_2 = C'' \qquad \text{(ovales)}.$$

Pour $k_1 + k_2 = 0$, on a

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = C'' \qquad \text{(cercles)}.$$

Quant à la fonction $u = X + Y\sqrt{-1}$, on a

$$X = \rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2},$$
$$Y = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2.$$

Épreuve pratique. — *Une hyperbole équilatère, dont le centre est le point* O, *tourne autour d'une de ses asymptotes* Oz.

Soit S *la surface de révolution qu'elle engendre.*

Soit P *le plan mené au point* O *perpendiculairement à* Oz.

1° *On propose d'effectuer la cubature du solide compris entre la surface* S, *le plan* P *et un cylindre ayant pour section droite une courbe* C, *donnée dans le plan* P.

On ramènera le problème au calcul d'une intégrale simple.

2° *Si la courbe* C *est une courbe entourant une fois le point* O, *ce solide a des points à distance infinie; démontrer que son volume est fini.*

3° *Appliquer le résultat qui précède au cas où* C *est une ellipse ayant un foyer au point* O.

Solution.

$\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$ étant l'équation polaire de l'ellipse, et

$$zx = a^2$$

étant l'équation de l'hyperbole, on a

$$V = \frac{2\pi a^2 p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

(Juillet 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Montrer que, si* y_1 *et* y_2 *satisfont aux équations différentielles*

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2,$$

le rapport

$$u = \frac{y_2}{y_1}$$

dépend d'une équation dite DE RICCATI, *c'est-à-dire d'une équation de la forme*

$$\frac{du}{dx} + A + Bu + Cu^2 = 0.$$

Les coefficients $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ *sont des fonctions données de* x, *et* A, B, C *sont des fonctions à calculer.*

Démontrer que, réciproquement, on peut faire correspondre à l'équation en u *un système en* y_1 *et* y_2 *formé d'une infinité de manières différentes.*

2° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x} y_1 + y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{x^2} y_1 + \frac{2}{x} y_2,$$

au moyen de la substitution $y_1 = x z_1$, $y_2 = z_2$; *former et intégrer l'équation en* $u = \dfrac{y_2}{y_1}$.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer les diverses valeurs de la fonction de variable imaginaire*

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Développer cette fonction en série de Maclaurin.
Cette série de Maclaurin peut-elle être intégrée ?
Quelle fonction usuelle représente la série intégrée ?

(Novembre 1901.)