STUYVAERT

Sur la sphère osculatrice à la cubique gauche

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 64-68

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__64_1>

[$M^3 5a$]

SUR LA SPHÈRE OSCULATRICE A LA CUBIQUE GAUCHE;

PAR M. STUYVAERT,

Professeur à l'Athénée royal de Gand.

J'ai donné (¹) une construction de la sphère osculatrice à la cubique gauche. Je me permets de revenir sur ce sujet, parce que j'ai exposé la solution sous une forme trop concise; d'ailleurs, M. Servais m'a fait remarquer que le cas de la cubique circulaire doit être examiné à part; enfin, le théorème formant le point de départ de cette recherche peut se démontrer par une méthode plus simple que celle que j'ai employée; cette méthode plus simple est due à feu M. Fr. Deruyts.

(¹) *Note sur les cubiques gauches* (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1900).

Théorème de Reye. — *Toutes les quadriques passant par six points* A, B, C, D, E, F *sont coupées en des couples de points en involution, par toute bisécante* d *de la cubique gauche* c_3 *déterminée par les six points donnés* ([1]).

Pour qu'il ne soit pas nécessaire de considérer à part le cas des imaginaires, il est désirable d'avoir une démonstration analytique. Voici celle de M. Deruyts.

L'équation du système de quadriques a la forme

$$\Sigma \equiv \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0.$$

Trois des surfaces S ne peuvent faire partie d'un même faisceau; elles ne peuvent pas appartenir, toutes les quatre, à un même réseau. Mais on peut supposer que S_3 et S_4 passent par c_3 et sa bisécante d.

Les coordonnées de tout point de d annulent S_3 et S_4. Donc, ceux de ces points qui appartiennent à Σ, appartiennent à $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ et inversement. Or, le faisceau $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ marque, sur d, une involution; par conséquent, il en est de même du système Σ.

Corollaire I. — Les points d'appui de d sur c_3 forment un couple de l'involution.

Corollaire II. — Si d est une tangente, le contact est un point double de l'involution; l'autre point double est sur le plan polaire du contact par rapport à toutes les quadriques Σ et, en particulier, par rapport aux couples de faces opposées de l'hexaèdre ABCDEF.

Théorème. — *Toutes les sphères passant par trois points* A, B, C *de* c_3 *coupent encore la courbe en des*

([1]) Reye, *Annali di matematica*, 2e série, t. II, p. 130.

triples de points D, E, F, *situés dans des plans parallèles* [1].

Soient

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1,$$

les équations de c_3.

L'équation d'une sphère passant par trois points contient une constante arbitraire λ, au premier degré. Si l'on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par ω^3, ω^2, ω, 1, on a une relation du sixième degré en ω, satisfaite, quel que soit λ, par les paramètres ω_1, ω_2, ω_3 de A, B, C.

En divisant le premier membre de l'équation par $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)$, on a une relation cubique en ω, avec la constante λ au premier degré. Les racines de cette équation sont les paramètres des points D, E, F et l'équation du plan DEF s'obtient en remplaçant ω^3, ω^2, ω, 1 par x_1, x_2, x_3, x_4. Comme cette équation contient toujours λ au premier degré, le plan décrit un faisceau.

En d'autres termes, si l'on prend un point D quelconque sur la cubique, les quatre points A, B, C, D sont sur une sphère qui coupe la courbe en deux nouveaux points E, F, de sorte que chaque terne D, E, F est déterminé, de la même manière, par un quelconque de ses points.

Donc, ces ternes décrivent une involution cubique du premier rang et les plans D, E, F passent par un même axe.

Comme une des sphères du système considéré se compose du plan ABC et du plan de l'infini, l'axe du faisceau des plans DEF est à l'infini.

---

[1] Théorème connu et facile à démontrer par la Géométrie.

PROBLÈME. — *Connaissant les trois points* A, B, C *de c_3 construire la direction du plan* DEF.

Soient : S une sphère quelconque par A, B, C, coupant encore c_3 en trois points inconnus D, E, F ; M un point de c_3 et t la tangente en ce point.

La droite t rencontre, en P le plan ABC, en Q le plan polaire de M relatif à S, et en X le plan inconnu DEF. Or, d'après le théorème de Reye, X est le conjugué harmonique de P sur MQ, et peut être construit.

Deux autres points M′ et M″ de la cubique donneront de même deux points X′ et X″ analogues à X ; le plan XX′X″ est le plan inconnu DEF.

PROBLÈME. — *Construire la sphère osculatrice en un point* A *de* c_3.

1° On suppose, dans le problème précédent, les points A, B, C coïncidents, c'est-à-dire que l'on commence par construire une sphère ayant, en A, un contact triponctuel avec la cubique. Pour cette opération, on projette c_3, d'un de ces points, sur le plan osculateur en A, puis on décrit le cercle osculateur c_2, en A, à la conique obtenue ; enfin, on mène par ce cercle une sphère quelconque S.

2° On détermine, comme dans le problème précédent, le plan DEF des trois autres intersections de S avec c_3.

3° Finalement, on mène, par A, un plan parallèle à DEF. Ce plan coupe c_3 en deux points qui appartiennent à la sphère osculatrice cherchée et achèvent de la déterminer.

Cas de la cubique circulaire. — 1° Ce qui précède permet, d'abord, de construire le plan qui contient les points circulaires à l'infini E, F de la cubique. Menons, comme ci-dessus, une sphère S ayant un contact triponctuel, en A, avec la cubique et passant par un point donné D de la courbe. Une tangente t au point M de la cubique perce en P le plan osculateur au point A, et en Q le plan polaire de M relatif à S; soit X le conjugué harmonique de P sur MQ. Un autre point M′ de la courbe donne, de même, un point X′ analogue à X; le plan DXX′ est le plan cherché DEF. Ce plan reste parallèle à lui-même si l'on fait varier D.

2° Cela étant, faisons coïncider D avec A; soit AEF un plan parallèle à la direction DEF trouvée à l'instant.

La tangente t au point M de la courbe perce, en P_1, le plan AEF, en P le plan osculateur au point A; soit Q_1 le conjugué harmonique de M relatif à P et P_1; M et Q_1 sont conjugués par rapport à la sphère osculatrice, ce qui suffit pour la déterminer.