Nouvelles annales de mathématiques

Henri Bouvier

Des involutions I_2^3 et I_{n-1}^n données par leurs points multiples : relations et constructions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 550-566

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__550_0>

[P6c]

DES INVOLUTIONS I_2^3 ET I_{n-1}^n DONNÉES PAR LEURS POINTS MULTIPLES : RELATIONS ET CONSTRUCTIONS;

PAR M. HENRI BOUVIER,
Professeur à l'Institution Robin, Vienne (Isère).

Lorsque les points d'un support sont rangés par groupes de n points, de telle façon que k points du support pris arbitrairement se trouvent réunis dans un groupe et dans un seul, on dit que l'ensemble k fois infini de ces n points forme une involution d'*ordre* ou de *degré* n et de *dimension, espèce* ou *rang* k ([1]). La loi de formation doit donc être telle que k points (dont plusieurs peuvent être confondus) pris dans un groupe déterminent sans ambiguïté les $n-k$ autres points du groupe, et c'est en cela que consiste le caractère involutif proprement dit. Pour abréger, on représente l'involution d'ordre n et de rang k par I_k^n.

L'importance particulière de l'involution I_{n-1}^n résulte de ce que les involutions I_k^n peuvent être considérées comme formées de groupes communs à $n-k$ involutions I_{n-1}^n.

Nous nous proposons ici d'étudier d'abord l'involution I_2^3 sur support rectiligne au moyen de deux relations

([1]) Nous trouvons ces différentes dénominations dans les travaux très nombreux faits surtout en Allemagne sur les involutions. Plusieurs n'emploient même jamais le mot *involutions;* ils les désignent sous les noms de *systèmes polaires du $n^{ième}$ ordre* (Wiener), de *correspondance symétrique trilinéaire* ou *réseau de ternes* (B. Klein), de *système conjugués de formes linéaires* (Schlesinger).

analogues à celles qui définissent l'involution quadratique I_1^2.

Nous déterminerons dans une première étude certaines propriétés ou constructions qui résultent de la première de ces relations, puis dans une autre étude celles qui découlent de la seconde. Il nous sera dès maintenant possible d'étendre certaines de ces propriétés ou constructions aux involutions I_{n-1}^n générales ou particulières.

I. — De la relation cubique involutive.

De même que l'involution quadratique I_1^2 se définit par le rapport harmonique qu'on peut mettre sous la forme

$$X_1A_1.X_2A_2 + X_2A_1.X_1A_2 = 0,$$

où X_1, X_2 représentent un groupe quelconque de l'involution quadratique ayant A_1 et A_2 pour points *doubles,* de même l'involution I_2^3 sera définie par la relation suivante, où X_1, X_2, X_3 représentent les points d'un terne et A_1, A_2, A_3 les points *triples* de l'involution :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &X_1A_1.X_2A_2.X_3A_3 + X_2A_1.X_3A_2.X_1A_3\\ &\qquad\qquad + X_3A_1.X_1A_2.X_2A_3 = 0,\end{aligned}\right.$$

relation dont le caractère involutif est évident.

On tirerait de cette relation ([1]), que nous désignerons sous le nom de *relation cubique involutive,* les propriétés suivantes, du reste bien connues, mais qu'il sera utile de rappeler au début de cette étude.

a. Les points triples A_1, A_2, A_3 forment eux-mêmes un groupe de l'involution I_2^3.

([1]) Cette relation a été simplement signalée dans la thèse d'Appel : *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (*Annales de l'École Normale,* 1876).

Nous ne l'avons vu signaler nulle part ailleurs *b*. Deux points d'un terne déterminent nécessairement le troisième appelé *polaire mixte* de ces points; il existe pourtant deux points, appelés *points neutres* et que nous désignerons par M_1 et M_2, qui n'admettent pas de polaire mixte déterminé.

c. Lorsque deux points neutres sont réels, deux points triples sont imaginaires conjugués; lorsqu'ils sont imaginaires conjugués, les points triples sont tous réels. La réciproque est vraie.

d. A chaque point correspondent les groupes d'une involution quadratique I_1^2; les points doubles de ces involutions I_1^2 seront eux-mêmes les couples d'une involution I_1^2 ayant les points neutres M_1 et M_2 pour points doubles.

e. Deux points dans un groupe peuvent se confondre; nous leur donnerons alors un double indice. On aura donc (X_{22} et X_{33} étant les points doubles de l'involution quadratique correspondant à X_1) les groupes

$$X_{22},\quad X_{22},\quad X_1 \qquad \text{et} \qquad X_{33},\quad X_{33},\quad X_1.$$

L'usage est alors d'appeler *premières polaires* de X_1 les points X_{22} et X_{33} et *seconde polaire* de X_{22} ou X_{33} le point X_1. Ce sont bien, en effet, les points qu'on désigne sous ce nom, lorsqu'on traite d'une forme cubique (définissant ici les points A_1, A_2, A_3) et de ses polaires.

II. — Expression paramétrique des points d'un groupe d'une involution I_2^3.

De la relation involutive (1) nous tirons une expression paramétrique des points d'un terne de l'involution I_2^3, expression analogue à la suivante qu'on établit pour les points de coordonnées x_1 et x_2, formant les groupes d'une involution I_1^2 de points doubles A_1 et A_2 :

$$x_1 = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\lambda + \mu},$$

$$x_2 = \frac{\lambda a_1 - \mu a_2}{\lambda - \mu}.$$

Cherchons donc à représenter les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points d'un terne X_1, X_2, X_3 d'une involution I_2^3, dont les points triples A_1, A_2, A_3 ont pour coordonnées a_1, a_2, a_3. Soient λ, μ, ν ; λ', μ', ν' ; λ'', μ'', ν'' des paramètres. On aura des expressions de la forme

$$x_1 = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3}{\lambda + \mu + \nu},$$

$$x_2 = \frac{\lambda' a_1 + \mu' a_2 + \nu' a_3}{\lambda' + \mu' + \nu'},$$

$$x_3 = \frac{\lambda'' a_1 + \mu'' a_2 + \nu'' a_3}{\lambda'' + \mu'' + \nu''}.$$

Pour que ces valeurs de x_1, x_2, x_3 satisfassent à la relation involutive (1) mise sous la forme

$$(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3) + (x_1 - a_2)(x_2 - a_3)(x_3 - a_1) + (x_1 - a_3)(x_2 - a_1)(x_3 - a_2) = 0,$$

un calcul simple montre qu'on doit avoir :

$$\frac{\nu}{\lambda} + \frac{\nu'}{\lambda'} + \frac{\nu''}{\lambda''} = 0. \qquad \frac{\nu}{\mu} + \frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu''}{\mu''} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda'}{\mu'} + \frac{\lambda''}{\mu''} = 0, \qquad \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\lambda'}{\nu'} + \frac{\lambda''}{\nu''} = 0,$$

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''} = 0, \qquad \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu'}{\lambda'} + \frac{\mu''}{\lambda''} = 0,$$

relations qui seront vérifiées par

$$\lambda = \lambda' = \lambda'',$$

$$\mu' = \mu\varepsilon, \qquad \mu'' = \mu\varepsilon^2,$$

$$\nu' = \nu\varepsilon^2, \qquad \nu'' = \nu\varepsilon,$$

où 1, ε et ε^2 sont les racines cubiques de l'unité positive.

On aura donc les relations cherchées

$$x_1 = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3}{\lambda + \mu + \nu},$$

$$x_2 = \frac{\lambda a_1 + \mu\varepsilon a_2 + \nu\varepsilon^2 a_3}{\lambda + \mu\varepsilon + \nu\varepsilon^2},$$

$$x_3 = \frac{\lambda a_1 + \mu\varepsilon^2 a_2 + \nu\varepsilon a_3}{\lambda + \mu\varepsilon^2 + \nu\varepsilon}.$$

Réciproquement, partant de ces relations sous la forme

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1 - a_1) + \mu(x_1 - a_2) + \nu(x_1 - a_3) &= 0,\\
\lambda(x_2 - a_1) + \mu\varepsilon(x_2 - a_2) + \nu\varepsilon^2(x_2 - a_3) &= 0,\\
\lambda(x_3 - a_1) + \mu\varepsilon^2(x_3 - a_2) + \nu\varepsilon(x_3 - a_3) &= 0,
\end{aligned}$$

on a, en éliminant λ, μ, ν,

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_1 - a_2 & x_1 - a_3 \\ x_2 - a_1 & \varepsilon(x_2 - a_2) & \varepsilon^2(x_2 - a_3) \\ x_3 - a_1 & \varepsilon^2(x_3 - a_2) & \varepsilon(x_3 - a_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on développe ce déterminant et que l'on tienne compte de la signification de ε, on retrouve la relation involutive donnée plus haut.

Remarque. — L'involution I_2^3 étant déterminée par trois ternes de points ayant pour coordonnées x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 peut être représentée sous la forme connue

$$\lambda(X - y_1)(X - y_2)(X - y_3) + \mu(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) + \nu(X - u_1)(X - u_2)(X - u_3) = 0.$$

Supposons que x_1, x_2, x_3 soient les coordonnées des points d'un terne; en substituant à X ces trois valeurs et en prenant comme ternes les points triples de coordonnées a_1, a_2, a_3, nous aurons, par l'élimination de λ, μ et ν, la relation

$$\begin{vmatrix} (x_1 - a_1)^3 & (x_1 - a_2)^3 & (x_1 - a_3)^3 \\ (x_2 - a_1)^3 & (x_2 - a_2)^3 & (x_2 - a_3)^3 \\ (x_3 - a_1)^3 & (x_3 - a_2)^3 & (x_3 - a_3)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

En rapprochant ce déterminant du précédent, nous voyons que la théorie de l'involution I_2^3 nous permet de conclure que le premier déterminant est facteur du dernier, ce qui aurait sans doute exigé de longs et pénibles calculs pour être démontré directement.

III. — Construction des groupes d'une involution I_2^3 donnée par ses points triples.

Remarques préliminaires.

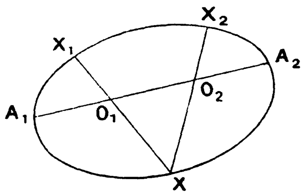
a. On sait que toute involution ou homographie située sur un support rectiligne peut être amenée à avoir pour support une conique, en projetant d'un point de la conique les éléments qui déterminent l'involution ou l'homographie, ce qui sera particulièrement avantageux pour les involutions et homographies quadratiques, dont on aura à faire usage.

b. Nous supposons connus, pour les involutions quadratiques, les moyens de construire, soit les couples d'une involution donnée par deux points doubles ou deux couples, soit le couple commun à deux involutions.

c. Nous signalerons pourtant, comme moyens auxiliaires, les solutions de certains problèmes concernant les homographies quadratiques.

Soit donc une homographie quadratique donnée sur une conique ou un cercle par ses deux points doubles A_1

et A_2 et par un couple X_1, X_2. On peut toujours supposer qu'on connaît les points doubles, car, par un procédé connu, on les trouverait facilement dans le cas où l'homographie serait donnée par trois quelconques de ses groupes. Joignons par une droite les deux points doubles. Par X_1 faisons passer une droite quelconque X_1X qui rencontre A_1A_2 en O_1; nous obtiendrons sur A_1A_2 un nouveau point O_2 en joignant X à X_2. Les deux involutions de centre O_1 et O_2 ont pour *résultante* ([1]) l'homographie donnée, si l'on entend par résultante l'homographie évidente obtenue en faisant correspondre à tout point d'une involution de



centre O_1 le correspondant de son conjugué harmonique dans une autre involution O_2.

Une homographie quadratique est donc d'une infinité de façons la résultante de deux involutions. Sans insister sur ce point de vue, remarquons que la construction des deux points qui correspondent à un même point dans une homographie où les supports sont confondus devient extrêmement facile.

Ce procédé nous conduit aussi à la solution de cet autre problème : chercher les couples communs à deux homographies. En les considérant chacune comme résul-

([1]) Deruyts, dans un *Mémoire sur la théorie de l'involution* (*Mémoires de la Société Royale de Liège,* 2^e série, t. XVII), a traité cette question de la résultante de deux involutions, mais au point de vue algébrique.

tante de deux involutions, on voit que le problème peut se ramener à déterminer le quadrilatère inscrit dans un cercle et qui passe par quatre points fixes. C'est le problème de Castillon étendu aux quadrilatères; on peut le résoudre par la méthode des inversions. Le problème admet deux solutions.

Dans le cas où l'une des homographies serait une involution, le problème reviendrait à chercher un triangle inscrit, passant par trois points donnés, et c'est le problème proprement dit de Castillon qu'on peut résoudre directement ou par la méthode des inversions (¹).

d. Si les trois points triples sont réels, les constructions que nous allons donner s'effectueront directement. S'ils sont imaginaires conjugués, on peut supposer que ces deux points sont donnés par deux couples de points réels d'une involution qui aurait pour points doubles ces points imaginaires; les constructions sont ainsi rendues toujours possibles.

Construction de la seconde polaire d'un point.

Soit X_{11} le point dont nous cherchons la seconde polaire X_2. Désignons par ξ_1 le conjugué harmonique de X_{11} par rapport au couple de points triples A_2 et A_3.

THÉORÈME I. — *La seconde polaire X_2 d'un point X_{11} est le correspondant X_2 de X_{11} dans une homographie de points doubles ξ_1 et A_1 définie par le rapport anharmonique*

$$\frac{X_{11}\xi_1}{X_2\xi_1}\,\frac{X_2A_1}{X_{11}A_1} = -2.$$

(¹) ROUCHE et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, Vol. I, p. 294.

En effet, la seconde polaire X_2 de X_{11} est définie par la relation

$$\frac{1}{X_{11}A_1}+\frac{1}{X_{11}A_2}+\frac{1}{X_{11}A_3}=\frac{3}{X_{11}X_2}.$$

Soit ξ_1 la première polaire (conjugué harmonique) de X_{11} par rapport à A_2 et A_3, on a

$$\frac{1}{X_{11}A_2}+\frac{1}{X_{11}A_3}=\frac{2}{X_{11}\xi_1},$$

et la première relation devient

$$\frac{1}{X_{11}A_1}+\frac{2}{X_{11}\xi_1}=\frac{3}{X_{11}X_2}.$$

Remplaçant $X_{11}X_2$ par $\xi_1X_2-\xi_1X_{11}$, on aboutit au rapport anharmonique donné.

Remarque. — Dans la construction, au lieu d'employer un rapport harmonique et un rapport anharmonique, on peut se servir des trois rapports harmoniques suivants, qui définissent deux points auxiliaires ξ_1 et ξ'_1 :

$$\frac{X_{11}A_2}{X_{11}A_3}\,\frac{\xi_1A_3}{\xi_1A_2}=-1,$$

$$\frac{X_{11}\xi_1}{X_{11}A_1}\,\frac{\xi'_1A_1}{\xi'_1\xi_1}=-1,$$

$$\frac{A_1\xi'_1}{A_1\xi_1}\,\frac{X_2\xi_1}{X_2\xi'_1}=-1.$$

En effet, le dernier rapport harmonique devient, par transposition de lettres,

$$\frac{\xi_1\xi'_1}{\xi_1X_2}\,\frac{A_1X_2}{A_1\xi'_1}=2.$$

En le multipliant par le second on retrouve le rapport anharmonique indiqué dans le théorème précédent.

Comme le conjugué harmonique d'un point peut se construire au moyen de la règle seule, la construction de la seconde polaire d'un point relativement à trois autres se fera, elle aussi, *avec la règle seule.*

Propriétés des points auxiliaires ξ employés dans la construction.

Nous désignerons par ξ_2 et ξ_3 les points obtenus de la même façon que ξ_1 et nous les appellerons *points auxiliaires* de X_{11}.

L'élimination de X_{11} entre les deux rapports signalés dans le théorème précédent donne la relation

$$\frac{1}{\xi_1 A_2} + \frac{1}{\xi_1 A_3} + \frac{1}{\xi_1 X_2} = \frac{3}{\xi_1 A_1}.$$

D'où :

Théorème II. — *Le point ξ_1, auxiliaire de X_{11}, a pour seconde polaire le point triple A_1 dans une involution I_2^3 qui aurait pour points triples les deux autres points triples A_2, A_3 de la première involution et la seconde polaire X_2 de X_{11} dans cette même involution.*

Corollaire. — *Le point α_1, conjugué harmonique de A_1 relativement à A_2 et A_3, a pour seconde polaire le point A_1.*

Ce résultat pouvait être obtenu directement, car les ternes $A_1A_1A_1$ et $A_1A_2A_3$ font partie de l'involution cubique; donc à A_1 sont associés tous les couples de l'involution quadratique, qui a pour point double A_1 et pour couple A_2, A_3; et cette involution aura pour deuxième point double le point α_1 conjugué harmonique du premier point double A_1, relativement à A_2 et A_3.

Théorème III. — *La seconde polaire d'un point X_{11} dans une involution I_2^3 est la polaire mixte des points* *triples* A_2 *et* A_3 *dans une involution particulière qui aurait deux points triples confondus au point auxiliaire* ξ_1 *et pour autre point triple le troisième point triple* A_1 *de la première involution.*

Or, on sait que, dans le cas de ces involutions particulières, les constructions se simplifient beaucoup.

THÉORÈME IV. — *Si deux points sont conjugués harmoniques par rapport à deux points triples, les secondes polaires de ces deux points divisent toujours la distance de ces deux mêmes points dans un rapport anharmonique égal à* 9.

Signalons enfin les relations suivantes :

$$\frac{X_{11}A_2}{X_{11}A_1}\,\frac{\xi_1 A_1}{\xi_1 X_2}\,\frac{\xi_2 X_2}{\xi_2 A_2} = 1,$$

$$\frac{\xi_1 A_1}{\xi_1 X_2}\,\frac{\xi_2 X_2}{\xi_2 A_2}\,\frac{\xi_3 A_2}{\xi_3 A_1} = -1,$$

relations qui permettraient de trouver la seconde polaire X_2 au moyen de procédés tirés de la géométrie du triangle.

Construction des premières polaires d'un point X_2.

Première méthode. — Du théorème sur la seconde polaire, on tire les relations

$$\frac{X_{11}A_2}{X_{11}A_3}\,\frac{\xi_1 A_3}{\xi_1 A_2} = -1$$

et

$$\frac{X_{11}\xi_1}{X_2\xi_1}\,\frac{X_2 A_1}{X_{11}A_1} = -2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{X_{11}X_2}{X_{11}A_1}\,\frac{\xi_1 A_1}{\xi_1 X_2} = 3.$$

Le couple ξ_1, X_{11} sera donc le couple commun à l'involution quadratique et à l'homographie définie par le deuxième rapport anharmonique mis sous sa seconde forme. Nous avons indiqué dans les remarques préliminaires que le problème, dans le cas où le support était une conique (et par projection il est toujours possible d'avoir un tel support), admettait deux solutions.

Seconde méthode. — Le procédé suivant nous semble plus pratique.

Soit α_1 le conjugué harmonique de A_1 par rapport aux deux points A_2 et A_3. Comme nous l'avons indiqué dans un corollaire du théorème, A_1 et α_1 sont les premières polaires du point A_1, c'est-à-dire les points doubles de l'involution quadratique correspondant à A_1. Si donc X'_2 désigne le conjugué harmonique de X_2, relativement aux points A_1, α_1, le terne $X_2 A_1 X'_2$ appartient à l'involution cubique; il en serait de même des ternes analogues $X_2 A_2 X''_2$, $X_2 A_3 X'''_2$. Les couples $A_1 X'_2$ et $A_2 X''_2$, par exemple, définissent une involution quadratique dont les points doubles sont les premières polaires de X_2.

Dans le cas où A_2 et A_3 sont imaginaires conjugués, il faut remarquer que α_1 et X'_2 se construisent aisément et que le couple $X_2 X'$ (X' étant la seconde polaire de X_2) appartient à l'involution $A_1 X'_2$ et $A_2 X''_2$. Or, X' se construit toujours. L'involution quadratique se trouvera donc définie par les couples $A_1 X'_2$ et $X_2 X'$.

Construction de la polaire mixte d'un point et du point à l'infini.

Désignons par X_0 la polaire mixte du point X_1 et du point à l'infini; la relation involutive devient

$$X_1 A_1 . X_0 A_2 + X_1 A_2 . X_0 A_3 + X_1 A_3 . X_0 A_1 = 0.$$

Théorème V. — *La polaire mixte* X_0 *de* X_1 *et du* *point à l'infini s'obtient au moyen de simples rapports, en cherchant :*

1° *Un point auxiliaire* E *qui divise intérieurement (ou extérieurement)* A_2A_3 *dans le même rapport que* X_1 *divise extérieurement (ou intérieurement)* A_2A_1 ;

2° *Le point* X_0 *qui divise extérieurement (ou intérieurement)* A_1E *dans le même rapport que* X_1 *divise intérieurement (ou extérieurement)* FA_3, F *étant à une distance de* X_1 *égale à* $X_1A_1 + X_1A_2$.

D'après cet énoncé, on trouvera le point X_0 en éliminant E entre les relations

$$\frac{EA_2}{EA_3} = -\frac{X_1A_2}{X_1A_1}, \qquad \frac{X_0A_1}{X_0E} = -\frac{X_1F}{X_1A_3} = -\frac{X_1A_1 + X_1A_2}{X_1A_3}.$$

On en tire, en effet,

$$X_0E(X_1A_1 + X_1A_2) = X_0A_2.X_1A_1 + X_0A_3.X_1A_2,$$
$$X_0E(X_1A_1 + X_1A_2) = -X_0A_1.X_1A_3.$$

Divisant membre à membre, on tombe immédiatement sur la relation donnée plus haut.

La construction déduite de ce théorème est purement linéaire.

Remarques :

1° La seconde polaire du point à l'infini serait donnée par ces simples rapports :

$$\frac{EA_2}{EA_3} = -1, \qquad \frac{X_0A_1}{X_0E} = -2,$$

le point E serait le milieu de A_2A_3.

2° En s'appuyant sur la relation donnée plus haut, on peut dire que la distance d'un point triple A_1 à la polaire mixte de ce même point et du point à l'infini est moyenne proportionnelle entre les distances à cette même polaire mixte des deux autres points triples.

Construction de la polaire mixte de deux points.

Soient X_1 et X_2 les deux points dont on cherche la polaire mixte X_3.

Première méthode. — Elle consiste à chercher les deux premières polaires de X_1 par exemple, puis le conjugué de X_2 dans l'involution quadratique qui aurait pour points doubles les deux premières polaires déjà obtenues.

Deuxième méthode. — Elle suppose qu'on a cherché par les méthodes indiquées la polaire mixte X_{02} de X_2 et du point à l'infini, et la seconde polaire X'_1 du point X_1. On arrive alors facilement au moyen de la relation symétrique trilinéaire qui, elle aussi, définit une involution I_3^2 à ce théorème :

Théorème VI. — *La polaire mixte* X_3 *de* X_1 *et* X_2 *divise la distance* X_1X_{02} *dans le même rapport que la seconde polaire* X'_1 *de* X_1 *divise la distance* X_2X_{02}, *ce qui est exprimé par la relation*

$$\frac{X_3X_1}{X_3X_{02}} = \frac{X'_1X_2}{X'_1X_{02}}.$$

On est ainsi conduit à une construction linéaire.

Autres procédés de construction.

Par projection, on peut transformer toute involution sur support rectiligne en une involution du même ordre et du même rang située sur une courbe unicursale et en particulier sur une conique.

Sur ce dernier support, d'ingénieuses constructions ont été données par B. Klein ([1]), Schlesinger ([2]), Le Paige et Deruyts ([3]) et nous pourrons revenir utilement sur ce sujet.

Nous terminerons cette étude des constructions par une remarque qui donne lieu à un nouveau procédé assez simple.

Si la base d'une involution I_2^3 à points triples réels est un cercle et que ces points triples a_1, a_2, a_3 soient les sommets d'un triangle équilatéral, les points x_1, x_2, x_3 formeront les ternes d'une involution I_2^3 si, dans un même sens, on a la relation

$$\operatorname{arc} a_1 x_1 + \operatorname{arc} a_2 x_2 + \operatorname{arc} a_3 x_3 = 2k\pi,$$

ce qui avec le compas donne des constructions faciles. Or il est également facile de transformer une involution I_2^3 sur support rectiligne et de points triples réels A_1, A_2, A_3 en une involution I_2^3 sur support circulaire ayant pour points triples les sommets d'un triangle équilatéral inscrit.

Remarquons aussi qu'il existe une parabole inscrite aux triangles $a_1 a_2 a_3$ et $x_1 x_2 x_3$.

IV. — Construction de la $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire dans une involution I_{n-1}^n.

Théorème VII. — *Si ξ_α désigne la $(\alpha - 1)^{ième}$ polaire d'un point X dans une involution $I_{\alpha-1}^\alpha$ et $\xi_{n-\alpha}$, la $(n-\alpha-1)^{ième}$ polaire de ce même point X dans*

([1]) *Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde.* Marburg, 1881.

([2]) *Ueber conjugirte binäre Formen.* Breslau, 1882. Dans ce Mémoire Schlesinger traite également des formes de degré supérieur.

([3]) *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, 2e série; t. XVII, 1882).

une autre involution $\mathrm{I}_{n-\alpha-1}^{n-\alpha}$, *la* $(n-1)^{i\grave{e}me}$ *polaire* X' *de* X *dans une involution* I_{n-1}^{n}, *ayant pour points multiples les n points multiples des deux premières, sera donnée par le rapport anharmonique*

$$\frac{\mathrm{X}\xi_\alpha}{\mathrm{X}\xi_{n-\alpha}}\,\frac{\mathrm{X}'\xi_{n-\alpha}}{\mathrm{X}'\xi_\alpha}=\frac{\alpha-n}{\alpha}.$$

En effet, de

$$\frac{1}{\mathrm{XA}_1}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{XA}_\alpha}=\frac{\alpha}{\mathrm{X}\xi_\alpha},$$
$$\frac{1}{\mathrm{XA}_{\alpha+1}}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{XA}_n}=\frac{n-\alpha}{\mathrm{X}\xi_{n-\alpha}},$$

on tire par addition :

$$\frac{1}{\mathrm{XA}_1}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{XA}_\alpha}+\frac{1}{\mathrm{XA}_{\alpha+1}}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{XA}_n}=\frac{\alpha}{\mathrm{X}\xi_\alpha}+\frac{n-\alpha}{\mathrm{X}\xi_{n-\alpha}}$$

ou

$$\frac{n}{\mathrm{XX}'}=\frac{\alpha}{\mathrm{X}\xi_\alpha}+\frac{n-\alpha}{\mathrm{X}\xi_{n-\alpha}},$$

et de cette expression on tire en remplaçant XX' par $\mathrm{X}\xi_\alpha+\xi_\alpha\mathrm{X}'$ le rapport anharmonique énoncé dans le théorème.

Conclusions.

1° Supposons $\alpha=1$, le rapport anharmonique devient si A_1 est l'un des points multiples d'une involution I_{n-1}^{n}

$$\frac{\mathrm{X}\xi_1}{\mathrm{XA}_1}\,\frac{\mathrm{X}'\mathrm{A}_1}{\mathrm{X}'\xi_1}=-(n-1).$$

Le point ξ_1 pourra se trouver au moyen d'une série de points ξ obtenus de la même façon. La $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire peut donc s'obtenir en partant d'un rapport harmonique par une suite de rapports anharmoniques dont les constantes sont en progression arithmétique, de raison -1. Chaque point multiple paraîtra dans l'un de ces rapports et l'ordre des points multiples ainsi employés est indifférent pour le résultat final.

2° Le rapport anharmonique du théorème précédent devient harmonique pour $\frac{\alpha - n}{\alpha} = -1$ ou $\alpha = \frac{n}{2}$. D'où :

THÉORÈME VIII. — *Dans une involution I_{n-1}^{n} de degré pair où $n = 2n'$, la $(n-1)^{ième}$ polaire X' d'un point X forme avec ce point X un couple dans une involution quadratique dont les points doubles sont respectivement les $(n'-1)^{ièmes}$ polaires de X relativement aux n' points de chacun des deux groupes qui composent d'une façon quelconque la totalité des n points multiples de l'involution I_{n-1}^{n} donnée.*

Comme les couples d'une involution quadratique sur support rectiligne peuvent se construire avec la règle seule, on constate que les $(n-1)^{ièmes}$ polaires dans une involution I_{n-1}^{n} pourront se construire *avec la règle seule* dans le cas où $n = 2^{p}$ (p entier et positif).

3° L'emploi d'un rapport anharmonique se ramène, comme nous l'avons vu (théorème I, remarque), à l'emploi de deux rapports harmoniques et d'un point auxiliaire dans le cas où $\frac{\alpha - n}{\alpha} = -2$, ce qui donne $\alpha = \frac{n}{3}$.

On voit par là que *les $(n-1)^{ièmes}$ polaires dans une involution I_{n-1}^{n} pourront se construire avec la règle seule dans le cas où $n = 3^{q}$* (q entier et positif) *et plus généralement encore dans le cas où $n = 2^{p} \times 3^{q}$.*

Dans un prochain article nous étudierons les involutions I_{2}^{3} en partant du couple de points neutres et nous généraliserons les résultats pour toute une classe d'involutions I_{n-1}^{n}.