Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 523-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__523_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1840.

(1900, p. 190)

On décrit un cercle ayant pour diamètre un rayon de courbure d'une conique donnée et l'on mène les tangentes communes à ces deux courbes. Quelle est l'enveloppe de la courbe de contact de ces tangentes et du cercle, lorsque l'on prend successivement tous les rayons de courbure de la conique? (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Soient C la conique donnée, MA et MB deux tangentes à cette conique, A et B leurs points de contact. Construisons le cercle Γ circonscrit au triangle MAB. Il existe un quadrilatère inscrit dans Γ et circonscrit à C, à savoir le quadrilatère AMBM dont deux sommets opposés sont confondus en M. D'après le théorème de Poncelet, tout quadrilatère inscrit à Γ et dont trois côtés sont tangents à C est tel que son quatrième côté est aussi tangent à C.

Soient, en particulier, P le point de contact avec Γ d'une tangente commune à C et à Γ, PQ la seconde tangente issue du point P à C, Q son second point de rencontre avec Γ. Le quadrilatère QPPQ, dont les sommets sont confondus deux à deux en P et en Q est inscrit à Γ; il a ses côtés QP, PP, PQ tangents à C. Donc son quatrième côté QQ est aussi tangent à C. Autrement dit, Q *est, comme* P, *le point de contact avec* Γ *d'une tangente commune à* C *et à* Γ.

Supposons maintenant que les points A et B se rapprochent indéfiniment sur C. Le cercle Γ, qui passe par le point de rencontre des normales en A et B, devient un cercle ayant pour diamètre un rayon de courbure de C. Comme la droite PQ ne cesse pas d'être tangente à C, on voit que *l'enveloppe demandée n'est autre que la conique donnée.*

1851.

(1900, p. 240)

Soient ABC *un triangle et* Σ *une conique circonscrite donnés. Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* A *rencontrent, pour la seconde fois,* Σ *en* α *et* α'. *Les cordes* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ *se coupent en un même point* P.

Si la conique Σ *passe par un quatrième point fixe* D, *quel sera le lieu de* P *pour toutes les coniques du faisceau* ABCD? (A. Droz-Farny.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Soit

$$lyz + mzx + nxy = 0$$

l'équation de Σ, ABC étant pris comme triangle de référence. La bissectrice intérieure de A est

$$y - z = 0;$$

les coordonnées de α sont donc

$$x_1, \quad -\frac{m+n}{l}x_1, \quad -\frac{m+n}{l}x_1.$$

De même celles de α' sont

$$x'_1, \quad \frac{-m+n}{l}x'_1, \quad \frac{m-n}{l}x'_1.$$

La droite $\alpha\alpha'$ a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -\frac{m+n}{l} & -\frac{m+n}{l} \\ 1 & \frac{n-m}{l} & \frac{m-n}{l} \end{vmatrix} = 0$$

ou, après simplification,

$$D_1 \equiv (n^2 - m^2)x - mly + nlz = 0.$$

En employant le même procédé, on trouve que les droites $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ ont respectivement pour équations :

$$D_2 \equiv mlx + (l^2 - n^2)y - mnz = 0$$

et

$$D_3 \equiv -nlx + mny + (m^2 - l^2)z = 0.$$

Or, on voit que

$$lD_1 + mD_2 + nD_3 \equiv 0.$$

Cela montre que ces trois droites concourent en un même point P. Pour avoir les coordonnées de P, il suffit de résoudre deux des trois équations des droites considérées par rapport à x, y, z. On trouve

$$(1, 2) \qquad \frac{x}{l(m^2+n^2-l^2)} = \frac{y}{m(n^2+l^2-m^2)} = \frac{z}{n(l^2+m^2-n^2)}.$$

Si a, b, c sont les coordonnées du point D, on doit avoir

$$lbc + mca + nab = 0$$

ou, en désignant par A, B, C les coordonnées de l'inverse de D

$$(3) \qquad Al + Bm + Cn = 0.$$

On obtiendra le lieu de P en éliminant l, m, n entre (1, 2) et (3). Or les équations (1, 2) peuvent s'écrire

$$\frac{mnx}{m^2+n^2-l^2} = \frac{lny}{n^2+l^2-m^2} = \frac{mlz}{l^2+m^2-n^2} = \frac{mnx+lny}{2n^2} = \frac{mnx+mlz}{2m^2} = \frac{lny+lmz}{2l^2}$$

ou finalement

$$(4)\quad \left\{ \frac{l}{ny+mz} = \frac{m}{lz+nx} = \frac{n}{mx+ly} = \frac{Al+Bm+Cn}{A(ny+mz)+B(lz+nx)+C(mx+ly)}. \right.$$

Le numérateur du dernier rapport étant nul, en vertu de (3), le dénominateur doit être nul aussi, l, m, n n'étant évidemment pas nuls; cela donne, en mettant l, m, n en facteurs,

$$(5)\quad (Bz+Cy)l+(Cx+Az)m+(Ay+Bx)n=0.$$

De (3) et (5) on tire

$$\frac{l}{B(Ay+Bx)-C(Cx+Az)} = \frac{m}{C(Bz+Cy)-A(Ay+Bx)} = \frac{n}{A(Cx+Az)-B(Bz+Cy)}.$$

En portant ces valeurs de l, m, n dans l'égalité des deuxième et troisième rapports (4), on trouve pour l'équation du lieu de P

$$\frac{C(Bz+Cy)-A(Ay+Bx)}{A(Cx+Az)x-B(Bz+Cy)x+B(Ay+Bx)z-C(Cx+Az)z} = \frac{A(Cx+Az)-B(Bz+Cy)}{B(Ay+Bx)y-C(Cx+Az)y+C(Bz+Cy)x-A(Ay+Bx)x}.$$

Ce lieu est une cubique. Développons; il vient successivement

$$\begin{aligned} 0 = {} & [-ABx+(C^2-A^2)y+BCz] \\ & \times[-ABx^2+ABy^2+(B^2-A^2)xy+BCxz-ACyz] \\ & -[ACx-BCy+(A^2-B^2)z] \\ & \times[ACx^2-ACz^2+(A^2-C^2)xz-BCxy+AByz] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&A(B^2 - C^2)x^3 + B(C^2 - A^2)y^3 + C(A^2 - B^2)z^3 \\
&\quad + A(A^2 - C^2 - 2B^2)xy^2 + B(B^2 - A^2 - 2C^2)yz^2 \\
&\quad + C(C^2 - B^2 - 2A^2)zx^2 + B(2A^2 + C^2 - B^2)x^2y \\
&\quad + C(2B^2 + A^2 - C^2)y^2z + A(2C^2 + B^2 - A^2)z^2x = 0.
\end{aligned}$$

On peut écrire cette équation

$$\begin{aligned}
\Sigma A(B^2 - C^2)x^3 + \Sigma A(A^2 - C^2 - 2B^2)xy^2& \\
+ \Sigma B(2A^2 + C^2 - B^2)x^2y &= 0,
\end{aligned}$$

en convenant de permuter circulairement et simultanément les lettres A, B, C d'une part et x, y, z d'autre part.

1923.

(1901, p. 96.)

On donne une quadrique (Q) *et deux droites* A *et* B; *démontrer que les droites qui, avec* A *et* B, *déterminent un hyperboloïde harmoniquement inscrit* (*ou circonscrit*) *à* (Q) *forment un complexe linéaire.* (R. Bricard.)

SOLUTION
Par M. R. Bricard.

L'énoncé comprend deux propositions corrélatives : il suffit de démontrer, par exemple, celle qui est relative aux hyperboloïdes harmoniquement circonscrits à (Q).

Considérons les hyperboloïdes (H), qui sont harmoniquement circonscrits à (Q), qui passent par un point fixe a, et qui contiennent enfin les droites A et B. Ces hyperboloïdes sont assujettis à huit conditions linéaires : ils forment donc un faisceau ponctuel. La courbe base de ce faisceau comprend les droites A, B, et celle qui passe par le point a et s'appuie sur A et B. Elle se complète donc d'une quatrième droite D qui s'appuie sur A et B.

Il s'ensuit que toutes les génératrices des hyperboloïdes (H), de même système que A et B, rencontrent une droite fixe D; toutes les droites qui satisfont à la condition de l'énoncé et qui passent en outre par un point fixe a engendrent donc un plan. Ces droites appartiennent bien à un complexe linéaire.

Si la quadrique (Q) se réduit à l'ombilicale, on voit que :

Les droites qui, avec deux droites fixes, déterminent un hyperboloïde orthogonal, engendrent un complexe linéaire.

Ce dernier résultat conduit immédiatement à un théorème énoncé par Ribaucour :

Les droites faisant partie d'un système de grandeur invariable assujetti à quatre conditions, et qui, pour l'ensemble des déplacements infiniment petits de ce système, engendrent un pinceau de normales, forment un complexe linéaire.

Soient, en effet, D et Δ les deux droites qui, d'après le théorème classique de Schönemann et Mannheim, sont conjuguées pour tous les déplacements infiniment petits du système, L une droite quelconque de ce système. La droite L engendre un pinceau dont les foyers sont, comme l'on sait, les points de rencontre avec L des deux droites G et Γ qui s'appuient sur L, D, Δ, et sont en outre perpendiculaires à L. G et Γ sont en outre les normales aux surfaces focales du pinceau.

Pour que le pinceau engendré par L soit un pinceau de normales, il faut et il suffit que G et Γ soient rectangulaires. Or ceci ne peut avoir lieu que si l'hyperboloïde défini par L, D, Δ est *orthogonal*.

Donc, etc.