NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL-J. SUCHAR

Sur une propriété appartenant à certaines hélices

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 511-514

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__511_1>

[M^4g]

SUR UNE PROPRIÉTÉ APPARTENANT A CERTAINES HÉLICES;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

Considérons les courbes C, C_1 et C_2, où C_1 est le lieu des centres de la sphère osculatrice à la courbe C, et C_2 le lieu des centres de la sphère osculatrice à la courbe C_1 ; $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ trois points correspondants; M_1 étant le centre de la sphère correspondant à M, et M_2 le centre de la sphère correspondant à M_1.

Je me propose de démontrer le théorème suivant :

Si les distances des points M_1 *et* M_2 *aux plans osculateurs aux courbes* C *et* C_1 *sont constantes, ces courbes sont des hélices.*

En effet, soient α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale à la courbe C au point M. Les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la bi-normale au point correspondant M_1 seront aux signes près α'', β'', γ''; α', β', γ'; α, β, γ. Désignons encore par ρ et τ, ρ_1 et τ_1 les rayons de courbure et de torsion de deux courbes aux points M et M_1, et par s et s_1 les arcs de deux courbes.

Nous aurons, d'après les formules de Frenet,

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha'}{\rho}, & \frac{d\alpha''}{ds_1} &= \frac{\alpha'}{\rho_1}, \\ \frac{d\alpha''}{ds} &= \frac{\alpha'}{\tau}, & \frac{d\alpha}{ds_1} &= \frac{\alpha'}{\tau_1}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho_1}{\tau} = \frac{\tau_1}{\rho}.$$

Cette dernière formule nous montre que, si la courbe C est une hélice, la courbe C_1 sera aussi une hélice.

Remarquons que les distances des points M_1 et M_2 aux plans osculateurs en M et M_1 sont $\tau\frac{d\rho}{ds}$ et $\tau_1\frac{d\rho_1}{ds_1}$; on aura alors

$$(3) \qquad \tau\frac{d\rho}{ds} = A,$$

$$(4) \qquad \tau_1\frac{d\rho_1}{ds_1} = A_1,$$

A et A_1 étant des constantes. Je dis que les rayons de courbures aux points M, M_1 et M_2 sont égaux.

En effet, on a pour les coordonnées du point M_1

$$x_1 = x + \rho\alpha' - \tau \frac{d\rho}{ds} \alpha'',$$

$$y_1 = y + \rho\beta' - \tau \frac{d\rho}{ds} \beta'',$$

$$z_1 = z + \rho\gamma' - \tau \frac{d\rho}{ds} \gamma'';$$

d'où, en différentiant et en ayant égard aux formules de Frenet, on aura

$$dx_1 = -\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)\right] \alpha'' ds,$$

$$dy_1 = -\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)\right] \beta'' ds,$$

$$dz_1 = -\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)\right] \gamma'' ds;$$

et comme on a, aux signes près,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha'', \qquad \frac{dy_1}{ds_1} = \beta'', \qquad \frac{dz_1}{ds_1} = \gamma'',$$

on aura, en ayant égard à (2),

$$\frac{\rho_1}{\tau} = \pm\left[\frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)\right],$$

et, par analogie,

$$\frac{\rho_2}{\tau_1} = \pm\left[\frac{\rho_1}{\tau_1} + \frac{d}{ds_1}\left(\tau_1 \frac{d\rho_1}{ds_1}\right)\right].$$

Il résulte donc, d'après (3) et (4), que ces rayons de courbure sont égaux.

Si nous divisions les relations (3) et (4), on trouve, en ayant égard à (2),

$$\frac{\tau}{\rho} = \pm \frac{A}{A_1},$$

c'est-à-dire que la courbe C est une hélice, et d'après la remarque faite au début, il résulte que les courbes C_1 et C_2 sont aussi des hélices. On remarque que le théorème proposé est en défaut si la constante $A = 0$, car cette condition entraîne aussi la condition $A_1 = 0$. En effet, la courbe C_2 coïncide avec la courbe C, puisque ρ est constant, et les deux courbes C et C_1 sont alors réciproques; le rapport $\frac{\tau}{\rho}$ sera indéterminé.