Maurice Fréchet

Sur les transformations quadratiques birationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 503-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__503_1>

[P4b]

SUR LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES BIRATIONNELLES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Étant donnés deux points m, m' situés dans deux plans P, P′ distincts ou non, soient x, y, z les coordonnées trilinéaires de m par rapport à un certain triangle de référence T dans le plan P; de même x', y', z' pour m' par rapport à un triangle T′ de P′.

On dira que m' dérive de m par une transformation quadratique birationnelle si l'on a

$$\frac{x'}{f(x, y, z)} = \frac{y'}{g(x, y, z)} = \frac{z'}{h(x, y, z)}, \tag{1}$$

f, g, h étant trois polynomes homogènes du second degré tels que les équations $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ représentent trois coniques ayant exactement trois points communs d'ailleurs distincts ou confondus : A, B, C.

On donne généralement une forme canonique distincte aux trois cas qui peuvent se présenter : A, B, C distincts; A, B confondus; A, B, C confondus.

Je me propose de montrer qu'on peut présenter ces trois cas sous la même forme géométrique.

1. Supposons d'abord A, B, C distincts et prenons pour triangle de référence T le triangle ABC; A, B, C ne sont pas en ligne droite, sans quoi $f = 0$, $g = 0$

et $h=0$ auraient plus de trois points communs, car elles comprendraient toute la droite ABC. On aura alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} f &\equiv ayz + bzx + cxy, \\ g &\equiv a'yz + b'zx - c'xy, \\ h &\equiv a''yz + b''zx + c''xy. \end{aligned}\right.$$

Soient

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{A}',\ \ldots$$

les mineurs de Δ.

δ n'est pas nul, sans quoi $f=0$, $g=0$, $h=0$ auraient plus de trois points communs. Donc le déterminant adjoint

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'' & \mathrm{B}'' & \mathrm{C}'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

De (1) et (2), on tire

$$\begin{aligned} \frac{x'}{ayz+bzx+cxy} &= \frac{y'}{a'yz+b'zx-c'xy} \\ &= \frac{z'}{a''yz-b''zx+c''xy} = \frac{\mathrm{A}x'+\mathrm{A}'y'+\mathrm{A}''z'}{\delta yz} \\ &= \frac{\mathrm{B}x'+\mathrm{B}'y'+\mathrm{B}''z'}{\delta zx} = \frac{\mathrm{C}x'+\mathrm{C}'y'+\mathrm{C}''z'}{\delta xy}. \end{aligned}$$

Puisque $\Delta \neq 0$ on pourra prendre comme triangle de référence dans le plan P′, le triangle formé par les droites

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x'+\mathrm{A}'y'+\mathrm{A}''z' &= 0, \\ \mathrm{B}x'+\mathrm{B}'y'+\mathrm{B}''z' &= 0, \\ \mathrm{C}x'+\mathrm{C}'y'-\mathrm{C}''z' &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par un choix convenable des coordonnées, les relations (1) prendront la forme

$$(3)\qquad \frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}.$$

2. Si AB sont confondus et distincts de C, on peut choisir le triangle T de façon que

$$f \equiv a\,xz + b\,yz + c\,x^2,$$
$$y \equiv a'\,xz + b'\,yz + c'\,x^2,$$
$$h \equiv a''\,xz + b''\,yz + c''\,x^2,$$

et l'on voit de même qu'on peut choisir le triangle T′ de façon que les relations (1) prennent la forme

$$(4) \qquad \frac{x'}{xz} = \frac{y'}{yz} = \frac{z'}{x^2}.$$

3. Enfin, si ABC sont confondus, on voit par un raisonnement analogue qu'on peut mettre la relation (1) sous la forme

$$(5) \qquad \frac{x'}{xy} = \frac{y'}{y^2} = \frac{z'}{x^2 - zy}.$$

Ayant ramené selon les cas la relation (1) à l'une des formes (3), (4), (5) par un simple changement de coordonnées, faisons sur m' une transformation homographique H′ qui le transforme en un point M du plan P de coordonnées X, Y, Z par rapport au même triangle T que m. Et nous définirons cette transformation particulière par les formules

$$\frac{x'}{\mathrm{Y}} = \frac{y'}{\mathrm{X}} = \frac{z'}{\mathrm{Z}} \qquad \text{(dans le premier cas)},$$

$$\frac{x'}{\mathrm{X}} = \frac{y'}{\mathrm{Y}} = \frac{z'}{\mathrm{Z}} \qquad \text{(dans les deux autres cas)}.$$

On voit alors que les relations (3), (4), (5) deviennent

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{y},$$

$$(7) \qquad \mathrm{X}\mathrm{F}'_x + \mathrm{Y}\mathrm{F}'_y + \mathrm{Z}\mathrm{F}'_z = 0,$$

en posant

$$F \equiv xy - z^2 \qquad \text{(dans le premier cas)},$$
$$F \equiv x^2 - z^2 \qquad \text{(dans le deuxième cas)},$$
$$F \equiv x^2 - 2yz \qquad \text{(dans le troisième cas)}.$$

Ainsi soit H_1 la transformation définie par les formules (6), (7) où F est un certain polynome homogène du second degré et soit H_2 la transformation inverse de H' :

Toute transformation birationnelle quadratique peut se décomposer en une transformation birationnelle quadratique réciproque H_1 *du plan* P *sur lui-même, suivie d'une transformation homographique* H_2 *du plan* P *sur le plan* P'.

De plus, *la transformation* H_1 *s'obtient ainsi : on fait correspondre au point* m *un point* M *tel que :*

1° mM *passe par un point fixe* $O(x = 0, y = 0)$;

2° M *et* m *sont conjugués par rapport à la conique* (*décomposable ou non*) $F = 0$.

Réciproquement une telle transformation est bien birationnelle quadratique réciproque, sauf le cas où F *serait décomposée en deux droites et passerait par* O (*cas où l'on aurait une homologie*). Car les relations (6) peuvent s'écrire

$$\frac{X}{xF'_z} = \frac{Y}{yF'_z} = \frac{Z}{-(xF'_x + yF'_y)}.$$

Les dénominateurs égalés à zéro représentent trois coniques se coupant aux trois points

$$(x = y = 0) \qquad \text{et} \qquad (F'_z = 0,\ xF'_x + yF'_y = 0).$$

Elles ne se coupent en quatre points que dans le cas indiqué.

Enfin, remarquons que : si F est décomposable, deux des points A, B, C sont confondus ; si F n'est pas décomposable mais passe par O, les trois points A, B, C sont confondus ; dans le cas général A, B, C sont distincts.

Observons en passant que si $F = 0$ est un cercle de centre O, la transformation est une simple inversion. D'ailleurs, dans le cas général, on peut supposer qu'il en soit ainsi en faisant d'abord une transformation homographique convenable. Donc, le cas général se ramène à celui de l'inversion au moyen de deux transformations homographiques.

Remarque. — Mentionnons, pour terminer, une propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements que je crois nouvelle et qui se démontre facilement au moyen de la transformation quadratique birationnelle :

Toute hypocycloïde à trois rebroussements peut être considérée comme enveloppe de celles des hyperboles passant par ses trois rebroussements dont l'angle des asymptotes est de 60°.