

A. MANNHEIM

**Expression de la variation de longueur  
d'une normale**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 3  
(1903), p. 481-483

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1903\\_4\\_3\\_481\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3_481_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

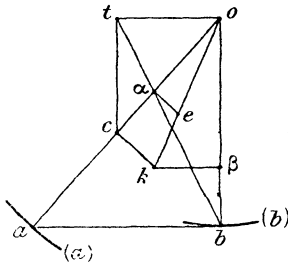
<http://www.numdam.org/>

[01]

**EXPRESSION DE LA VARIATION DE LONGUEUR  
D'UNE NORMALE;**

PAR M. A. MANNHEIM.

On donne les courbes  $(a)$ ,  $(b)$ . Du point  $a$  on mène la normale  $ao$  à  $(a)$  et la tangente  $ab$  à  $(b)$ ; la normale en  $b$  à  $(b)$  coupe au point  $o$  la normale  $ao$ . Dé-



terminer l'expression de la variation de longueur de  $ao$  pour une variation angulaire infiniment petite de la tangente  $ab$ .

Sur la droite  $oa$ , construisons le point  $c$  de façon que  $\frac{1}{oc} = \frac{1}{ox} - \frac{1}{oa}$ , le point  $x$  étant le centre de courbure de  $(a)$ . Pour cela, menons du point  $o$  la droite  $ot$  parallèlement à  $ab$ . Cette droite est coupée au point  $t$  par la droite  $bx$  : la perpendiculaire  $tc$  à  $ab$  donne le point  $c$ .

La perpendiculaire  $ck$  à  $ao$  coupe au point  $k$  la droite  $\beta k$  élevée à  $bo$  du centre de courbure  $\beta$  de  $(b)$  : la

droite  $ok$  est la normale en  $o$  à la courbe décrite par ce point lorsqu'on fait varier la tangente  $ab$  (1).

Cette normale  $ok$  est coupée au point  $e$  par la perpendiculaire  $\alpha e$  à  $ao$ .

Une formule connue (2) donne

$$(1) \quad d(ao) = e\alpha \frac{d(\alpha)}{\alpha a}.$$

Appelons  $d\varphi$  l'angle de contingence de  $(b)$  en  $b$ ; on a

$$d(\alpha) = o\alpha \cdot d\varphi.$$

Portons cette valeur dans la relation (1), il vient

$$d(ao) = e\alpha \frac{o\alpha}{\alpha a} d\varphi.$$

Les triangles semblables  $o\alpha e$ ,  $ock$  donnent

$$\frac{e\alpha}{kc} = \frac{o\alpha}{oc},$$

d'où

$$e\alpha = \frac{1}{oc} o\alpha \cdot kc.$$

Portant cette valeur dans l'égalité précédente, elle devient

$$d(ao) = \frac{1}{oc} \frac{o\alpha \cdot o\alpha}{\alpha a} kc \cdot d\varphi.$$

Tenant compte de la valeur de  $\frac{1}{oc}$  rappelée plus haut il reste

$$(2) \quad d(ao) = kc \cdot d\varphi.$$

Telle est l'expression demandée.

Comme l'on sait, la variation de longueur de  $ao$  est positive ou négative selon que  $\alpha$ , tournant autour de  $e$ ,

(1) *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 36.

(2) *Loc. cit.*, p. 45.

s'éloigne ou se rapproche de  $a$ . La même règle s'applique pour l'expression (2), le point  $c$  tournant autour de  $k$ .

Comme exemple, voici l'énoncé d'un problème que l'expression (2) permet tout de suite de résoudre :

*Une corde se déplace de façon que l'arc qu'elle sous-tend sur une courbe donnée soit de longueur constante, construire le centre de courbure de son enveloppe.*