NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École normale en 1903. Composition de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 455-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__455_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1903. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Solution par M. Jean SERVAIS.

On considère deux surfaces du second ordre (P), (Q) *définies en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$(P) \qquad y^2 - zx - a^2 = 0,$$

$$(Q) \qquad 2y^2 - x^2 - zx - ay = 0,$$

où a *désigne une constante. Soit* (C) *la courbe d'intersection de ces deux surfaces.*

I. *Former les équations des projections orthogonales de cette courbe* (C) *sur le plan des* xy *et sur le plan des* zx. *Construire ces courbes.*

II. *Considérant, en particulier, la projection de* (C) *sur le plan des* zx, *on déterminera l'aire comprise entre l'axe des* x, *la branche supérieure de la courbe* *et les droites qui, dans ce plan, ont pour équations*

$$x = a, \qquad x = a\sqrt{3}.$$

III. *Soit* M *un point de* (C); *par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface* (P) *qui rencontrent la courbe* (C) *en deux points* M_1 *et* M'_1, *autres que* M. *Quel est le lieu* (R) *de la droite* $M_1M'_1$ *quand le point* M *décrit la courbe* (C)? *De quoi se composent les intersections de la surface* (R) *avec chacune des surfaces* (P) *et* (Q)?

IV. *Par le point* M_1, *précédemment défini, passe une génératrice de* (P), *autre que la droite* M_1M; *soit* M_2 *le point d'intersection, autre que* M_1, *de cette génératrice de la courbe* (C); *par le point* M_2 *passe une génératrice de* (P), *autre que la droite* M_2M_1; *soit* M_3 *le point d'intersection, autre que* M_2, *de cette génératrice et de la courbe* (C); *on continue de la même façon, ... Démontrer que la ligne polygonale* $MM_1M_2\ldots$ *se ferme et qu'il en est de même de la ligne polygonale obtenue par la même construction en remplaçant simplement le point* M_1 *par le point* M'_1.

I. L'équation de la projection de la courbe (C) sur le plan des xy est

$$y^2 - x^2 - ay + a^2 = 0.$$

Cette projection est une hyperbole équilatère facile à construire (*fig.* 1).

L'équation de la projection sur le plan des zx est

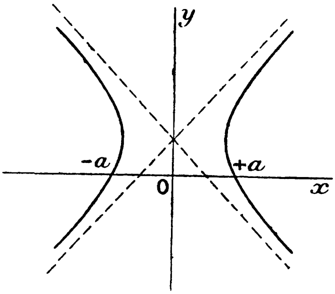
$$(zx + 2a^2 - x^2)^2 = a^2(zx + a^2).$$

En résolvant par rapport à z on trouve

$$z = \frac{2x^2 - 3a^2 \pm a\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{2x}.$$

Pour construire cette courbe remarquons d'abord que l'origine est centre. Il suffit alors de donner à x des valeurs positives pour avoir la moitié de la courbe dont on déduira le reste par symétrie. Pour que z soit réel, il faut que x soit supérieur à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. On fera donc varier x de $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ à $+\infty$. A chacun des signes du radical correspond une branche de courbe. Pour avoir les deux asymptotes, il suffit de développer le radical suivant les puissances décroissantes de x. Les premiers termes

Fig. 1.



des développements des deux valeurs de z sont ainsi

$$z = x \pm a - \frac{3a^2}{2x} + \ldots.$$

Les deux asymptotes sont donc les deux droites

$$z = x + a \qquad \text{et} \qquad z = x - a,$$

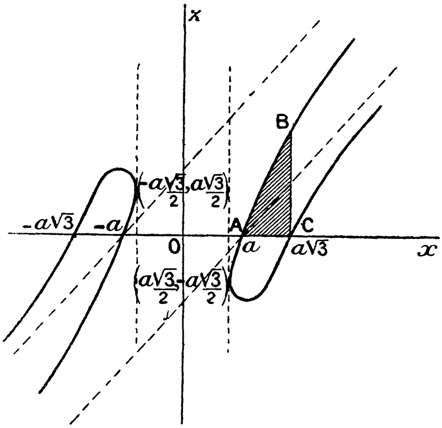
et, de plus, le développement montre que la courbe $(x > 0)$ est au-dessous de ses asymptotes.

La courbe coupe l'axe Ox aux points d'abscisses $\pm a$ et $\pm a\sqrt{3}$.

Ces renseignements suffisent pour tracer la courbe (*fig.* 2) qu'on peut d'ailleurs avoir avec plus de précision en prenant les dérivées des valeurs de z.

II. L'aire cherchée est l'aire du triangle mixti-

Fig. 2.



ligne ABC (*fig.* 2) et s'obtient en calculant l'intégrale

$$S = \int_a^{a\sqrt{3}} z\,dx,$$

où l'on prend pour z la valeur qui correspond au signe $+$ devant le radical, afin d'avoir la branche supérieure AB.

On a alors

$$S = \int_a^{a\sqrt{3}} \left(x - \frac{3a^2}{2x} + \frac{a}{2x}\sqrt{4x^2 - 3a^2}\right) dx.$$

La seule difficulté de ce calcul est la recherche de l'intégrale indéfinie

$$J = \int \frac{a}{2x}\sqrt{4x^2 - 3a^2}\,dx.$$

Pour la calculer, posons

$$\sqrt{4x^2 - 3a^2} = t,$$

et elle devient

$$J = \int \frac{at^2\,dt}{2(3a^2 + t^2)} = \int \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2(3a^2 + t^2)}\right) dt$$
$$= \frac{a}{2}t - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{a\sqrt{3}}.$$

En revenant aux anciennes variables et portant dans S, on a

$$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\log x + \frac{a}{2}\sqrt{4x^2 - 3a^2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{a\sqrt{3}}\right)_a^{a\sqrt{3}}.$$

Tous calculs faits, on trouve

$$S = \left(2 - \frac{3}{4}\log 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\right)a^2.$$

III. Pour traiter les deux dernières Parties, remarquons que l'hyperboloïde (P) a deux génératrices

$$x = 0, \qquad y = \pm a,$$

parallèles à Oz. Il en résulte que les projections des génératrices sur le plan xOy passeront par l'un des deux points $A(x = 0, y = a)$ ou $A'(x = 0, y = -a)$.

Soient alors $x'y'z'$ les coordonnées de M, sa projection m (*fig.* 3) sur le plan des xy sera située sur l'hyperbole et l'on aura

$$(1) \qquad x'^2 = y'^2 - ay' + a^2.$$

Les projections des génératrices qui passent par le point M de l'espace seront les droites mA et mA' (*fig.* 3). La droite mA a pour équation

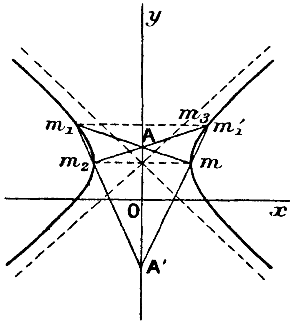
$$(2) \qquad \frac{y - a}{y' - a} = \frac{x}{x'},$$

elle coupe l'hyperbole en un second point m_1 qui est la projection du point M_1 de l'espace. L'équation aux y des points d'intersection de la droite mA et de l'hyperbole est alors

$$(y^2 - ay + a^2)(y' - a)^2 - (y'^2 - ay' + a^2)(y - a)^2 = 0.$$

Le produit des racines de cette équation est égal à a^2. Comme l'une des racines est y' l'autre est égale à $\frac{a^2}{y'}$. C'est l'ordonnée de m_1. Son abscisse est fournie par

Fig. 3.



l'équation (2) où l'on donne à y la valeur $\frac{a^2}{y'}$. On trouve ainsi pour les coordonnées x_1 et y_1 de m_1

$$x_1 = -\frac{ax'}{y'}, \qquad y_1 = \frac{a^2}{y'}.$$

L'ordonnée z_1 du point M_1 de l'espace est ensuite formée par l'équation de (P)

$$z_1 = \frac{y_1^2 - a^2}{x_1} = \frac{a(y'^2 - a^2)}{x'y'}.$$

En joignant le point m (*fig.* 3) au point A', on a la projection de la seconde génératrice de (P) qui passe en M. Cette projection coupe l'hyperbole en un second point m'_1 qui est la projection du point M'_1 de l'espace cherché.

Il est inutile de refaire le calcul, car, puisque le point A' remplace le point A, il n'y a qu'à changer a en $-a$ dans les formules qui donnent les coordonnées de M_1 pour avoir celles de M'_1.

On trouve ainsi, pour ces coordonnées,

$$x'_1 = \frac{ax'}{y'}, \qquad y'_1 = \frac{a^2}{y'}, \qquad z'_1 = -\frac{a(y'^2 - a^2)}{x'y'}.$$

On a donc

$$x'_1 = -x_1, \qquad y'_1 = y_1, \qquad z'_1 = -z_1.$$

Les deux points M_1 et M'_1 sont symétriques par rapport à Oy et la droite $M_1M'_1$ engendrera évidemment le conoïde formé par les droites qui s'appuient sur Oy et sur la courbe (C) en restant parallèles au plan zOx.

L'équation de ce conoïde s'obtient sans difficulté et l'on trouve

$$x(y^2 - a^2) - z(y^2 - ay + a^2) = 0.$$

Comme il est formé de droites qui s'appuient sur (C), il coupe évidemment les deux surfaces (P) et (Q) d'abord suivant cette courbe (C).

Il coupe en outre (P) suivant les deux génératrices

$$z = 0, \qquad y = \pm a.$$

Pour avoir la seconde partie de l'intersection avec la surface (Q), projetons l'intersection sur le plan des xy. Cette projection a pour équation

$$(2y^2 - ay)(x^2 - y^2 + ay - a^2) = 0.$$

Le facteur $x^2 - y^2 + ay - a^2 = 0$ donne l'hyperbole projection de la courbe (C). Le reste de l'intersection se trouve alors dans les plans $y = 0$ et $y = \frac{a}{2}$. Ce sont donc les deux génératrices

$$y = 0, \qquad x + z = 0;$$
$$y = \frac{a}{2}, \qquad x + z = 0.$$

IV. La dernière partie du problème est immédiate. En effet, nous avons vu que, si par un point M de (C) on mène les deux génératrices de (P) qui y passent, elles coupent (C) en deux points M_1 et M'_1 symétriques par rapport à Oy. Par suite, les droites M_1M_2 et M_1M étant les deux génératrices issues de M_1, M_2 est le symétrique de M par rapport à Oy.

Menons la génératrice M_2M_3 qui coupe (C) en M_3. Pour la même raison M_3 est le symétrique de M_1 par rapport à Oy. Donc, M_3 *coïncide avec* M'_1. La seconde génératrice issue de M_3 (ou M'_1) revient donc passer en M.

La ligne polygonale est donc un quadrilatère gauche $MM_1M_2M_3$ dont les sommets sont deux à deux symétriques par rapport à Oy. Le raisonnement prouve de plus qu'on retrouve *le même* quadrilatère si l'on remplace M_1 par M'_1.

Remarque. — On aurait pu faire ce problème en suivant la méthode générale applicable à l'étude des quadrilatères gauches formés par les génératrices d'une quadrique et inscrits dans une biquadratique unicursale.

Les deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde (P) sont

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} y - a &= \lambda x, \\ y + a &= \frac{z}{\lambda}; \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} y + a &= \mu x, \\ y - a &= \frac{z}{\mu}. \end{aligned} \right.$$

En résolvant, on a les coordonnées d'un point de (P) en fonction de deux paramètres λ et μ :

$$(3)\qquad x = \frac{2a}{\mu - \lambda}, \qquad y = \frac{a(\lambda + \mu)}{\mu - \lambda}, \qquad z = \frac{2a\lambda\mu}{\mu - \lambda}.$$

En exprimant que ce point est sur la surface (Q) on trouve la relation

$$3\lambda^2 + \mu^2 - 4 = 0.$$

Les deux paramètres λ et μ liés par cette relation peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre t

$$\lambda = -\frac{4t}{t^2 + 3}, \qquad \mu = 2\frac{3 - t^2}{3 + t^2}.$$

En remplaçant λ et μ par leurs valeurs dans les formules (3) on a les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe (C) exprimées rationnellement en fonction d'un paramètre

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\frac{t^2 + 3}{-t^2 + 2t + 3}, \\ y &= a\frac{-t^2 - 2t + 3}{-t^2 + 2t + 3}, \\ z &= 8a\frac{t(t^2 - 3)}{(t^2 + 3)(-t^2 + 2t + 3)}. \end{aligned}\right.$$

Soit alors t la valeur du paramètre relative à M, remarquons que pour deux points de (C) situés sur une même génératrice du système (I) λ doit avoir la même valeur. Les deux valeurs de t correspondantes sont donc racines de l'équation

$$\lambda(t^2 + 3) + 4t = 0.$$

Le produit des racines est 3. Donc, si l'une des racines est t, l'autre est $\frac{3}{t}$. La valeur du paramètre correspondant à M_1 est donc

$$t_1 = \frac{3}{t}.$$

De même, les deux valeurs de t correspondantes à deux points de (C) situés sur une même génératrice du système (II) sont racines de l'équation

$$\mu(3 + t^2) + 2(t^2 - 3) = 0,$$

dont les racines sont *opposées*. La valeur du paramètre correspondant à M'_1 est donc

$$t'_1 = -t.$$

Cela étant, les valeurs du paramètre correspondantes aux points M_1, M_2, ... se calculent facilement.

Pour M_1, on a

$$t_1 = \frac{3}{t};$$

pour M_2, on a

$$t_2 = -t_1 = -\frac{3}{t};$$

pour M_3, on a

$$t_3 = \frac{3}{t_2} = -t;$$

pour M_4, on a

$$t_4 = -t_3 = t.$$

Donc M_4 coïncide avec M.