

R. BRICARD

**Sur le déplacement d'une figure de grandeur
invariable assujettie à trois conditions**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 448-455

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3_448_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[08]

**SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE GRANDEUR INVARIABLE
ASSUJETTIE A TROIS CONDITIONS;**

PAR M. R. BRICARD.

1. Quand une figure (F) de grandeur invariable est assujettie à trois conditions seulement, sa position dans l'espace dépend de trois paramètres indépendants et, en général, un point de (F) peut être amené à coïncider avec un point quelconque donné dans l'espace (sous la réserve de certaines conditions de réalité, bien entendu). Il peut y avoir exception pour certains points de (F), que les conditions du déplacement obligent à rester sur des surfaces bien définies : ainsi, la figure (F) peut être astreinte précisément à ce que *trois* de ses points restent sur des surfaces données. On peut encore considérer le *déplacement à trois paramètres* d'un trièdre trirectangle dont les faces touchent une quadrique donnée (ou même trois quadriques homofocales) : le sommet du trièdre reste sur une sphère, comme il est bien connu.

Un théorème dû à M. Mannheim ⁽¹⁾ apprend que, pour les ∞^3 déplacements infiniment petits que (F) peut recevoir à partir d'une de ses positions, il existe ∞^2 points de cette figure qui restent chacun sur un élément de surface bien déterminé : ce sont les points d'un certain hyperboloïde.

Cet hyperboloïde peut devenir indéterminé dans certains cas, et alors tous les points de (F) restent sur des

⁽¹⁾ *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 313.

éléments de surface bien déterminés, pour tous les déplacements infiniment petits dont il s'agit.

Il est naturel de se poser la question suivante, et ce sera l'objet de cette Note : peut-il arriver que la particularité dont il a été question en dernier lieu s'étende à tous les déplacements *finis* de (F)? Autrement dit :

Une figure (F) de grandeur invariable est assujettie à trois conditions seulement. Ces conditions peuvent-elles être choisies de telle manière que tout point de (F) soit astreint à rester sur une certaine surface?

Or, on voit tout de suite une réponse à cette question : quand une figure est assujettie à avoir un point fixe, trois conditions seulement lui sont imposées, et chaque point de cette figure reste sur une sphère (ou sur un plan, si le point fixe est à l'infini).

L'étude qui va suivre établira que cette solution est la seule.

2. Considérons une figure (F), de grandeur invariable, assujettie à trois conditions telles que chaque point de (F) soit astreint à rester sur une certaine surface. Soient a , b , c trois points appartenant à (F), *non en ligne droite*, et désignons par (A), (B), (C) les surfaces sur lesquelles ils restent respectivement (*surfaces trajectoires*). Si ces points ne sont pas choisis d'une façon particulière, chacun d'eux peut occuper une position arbitraire sur sa surface trajectoire (¹); on peut

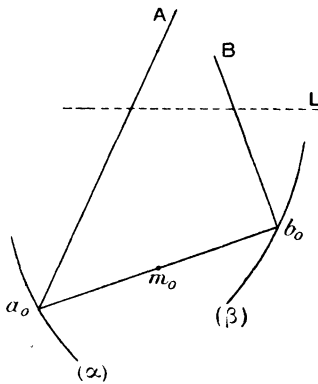
(¹) En effet, si l'on ne pouvait trouver trois points tels que chacun se déplace librement sur sa surface trajectoire, il faudrait en conclure que chaque point de (F) décrit une courbe, et il est immédiatement visible qu'il n'existe pas de déplacement à trois paramètres (ni même à deux) tel que chaque point de la figure mobile décrive une courbe.

supposer que les trois conditions imposées à (F) sont précisément que les points a , b , c restent respectivement sur (A), (B), (C).

Soit m un point de la droite ab : ce point doit rester sur une surface (M); mais il est clair que le déplacement du point m résulte uniquement de sa liaison avec les points a et b : la condition imposée au point c n'intervient en rien dans la définition de ce déplacement. Nous sommes ainsi amenés à la question suivante, plus simple que le problème proposé.

Un segment ab de longueur constante se déplace de telle manière que ses extrémités a et b restent respectivement sur des surfaces données (A) et (B). Dans quel cas ces deux conditions suffisent-elles à astreindre un point quelconque m de ab à rester aussi sur une surface déterminée (M)?

Soit $a_0 b_0$ (figure ci-dessous) l'une des positions que



peut prendre le segment mobile ab . On peut déplacer le segment ab de telle manière que le point a décrive une courbe quelconque (α) tracée sur (A) et passant par a_0 , et que le point b décrive une courbe quelconque (β)

tracée sur (B) et passant par b_0 . Le point m , actuellement situé en m_0 décrit dans ces conditions une trajectoire déterminée (μ). Le plan (P_μ) normal à cette trajectoire au point m_0 , passe comme l'on sait par la droite L commune aux plans (P_a) et (P_b), normaux respectivement à (α) en a_0 et à (β) en b_0 .

Les deux plans (P_a) et (P_b) contiennent respectivement la normale A à (A) au point a_0 et la normale B à (B) au point b_0 . Si ces deux normales ne se rencontrent pas, à distance finie ou infinie, on peut évidemment disposer des courbes *arbitraires* (α) et (β) de telle manière que les plans (P_a) et (P_b) rencontrent respectivement les droites A et B en des points quelconques donnés *a priori*. La droite L commune à ces deux plans sera une droite quelconque s'appuyant sur A et sur B, et le plan (P_μ) un plan quelconque passant par m_0 .

Ainsi, dans le cas où les normales A et B ne se rencontrent pas, le point m peut se déplacer à partir de m_0 normalement à un plan quelconque. Le point m n'a donc certainement pas de surface trajectoire déterminée.

Il est donc nécessaire que A et B se rencontrent, à distance finie ou infinie. Réciproquement, si cette condition est remplie, et si l'on désigne par i le point de rencontre de ces droites, on voit que toutes les trajectoires possibles du point m à partir de m_0 seront normales à la droite m_0i . Autrement dit, pour tous les déplacements possibles du segment ab à partir de la position a_0b_0 , le point m reste sur un élément de surface bien déterminé, normal à la droite m_0i .

Il faut que cette circonstance se présente pour toutes les positions possibles de la droite ab . Voici donc le problème qui se pose :

Trouver deux surfaces (A) et (B) telles que si ab est un segment quelconque, de longueur convenable dont

les extrémités a et b se trouvent respectivement sur ces surfaces, la normale A à (A) en a , et la normale B à (B) en b se rencontrent.

Fixons pour un moment le point a en a_0 sur (A) : le point b peut alors décrire une certaine courbe (β') intersection de (B) et d'une sphère ayant son centre en a_0 . Soit b_0 un point quelconque de cette courbe. La droite B , normale à (B_0) en b doit par hypothèse rencontrer A , normale à (A_0) en a . Mais B détermine avec $a_0 b_0$ le plan normal à (β') en b_0 . La courbe (β') est donc telle que tous ses plans normaux contiennent A : c'est un cercle d'axe A ⁽¹⁾.

Ce raisonnement ne tombe en défaut que si B et A sont confondues, c'est-à-dire si les surfaces (A) et (B) sont parallèles. S'il en est ainsi, considérons un point c de la figure (F) , non situé sur la droite ab ; ce point c ne décrit certainement pas une surface parallèle à (A) , puisque ab n'est pas normale à (A) . On remplacera dans le raisonnement le point b par le point c , et les conclusions seront de nouveau légitimes.

A chaque point a_0 de (A) correspond ainsi un cercle (β') tracé sur (B) [il est bien évident qu'à deux points au plus de (A) peut correspondre le même cercle de (B)]. La surface (B) doit donc contenir des cercles dépendant de deux paramètres, d'une façon continue. *C'est nécessairement une sphère*, car il n'y a pas d'autre surface jouissant d'une telle propriété ⁽²⁾. On voit en outre que toutes les droites telles que A passent par le centre de cette sphère : (A) est donc aussi une sphère concentrique à (B) .

⁽¹⁾ Ce pourrait aussi être une droite isotrope rencontrant A : mais je me borne aux déplacements réels.

⁽²⁾ Voir le n° 3.

Ainsi les points a et b décrivent deux sphères concentriques : mais ce sont deux points quelconques de (F). Donc tous les points de (F) restent sur des sphères concentriques, et cette figure a un point fixe. Le seul déplacement répondant à la question est bien celui qui avait été signalé au début.

3. Vers la fin du n° 2, je me suis appuyé sur la proposition suivante :

La seule surface contenant des cercles dépendant de deux paramètres, d'une façon continue, est la sphère.

Voici une démonstration de ce théorème :

Soient (S) une surface contenant des cercles dépendant de deux paramètres, d'une façon continue, Γ l'un de ces cercles, (P) son plan. Les plans (P) dépendent aussi de deux paramètres : en effet, s'ils dépendaient d'un seul paramètre, chaque plan (P) contiendrait une infinité *continue* de sections circulaires de (S), ce qui est absurde [à moins que le point (P) ne soit fixe, et que (S) ne se réduise à ce plan ; or, le plan est une sphère particulière]. Les plans (P) enveloppent donc une surface non développable (Σ).

Considérons un cercle particulier Γ_0 et soit (P_0) son plan ; (P_0) peut couper la surface (S) suivant une courbe Γ'_0 en plus du cercle Γ_0 . Désignons par l_1, m_1, \dots, p les points d'intersection éventuels de Γ_0 et de Γ'_0 . Déplaçons maintenant le plan (P), à partir de la position (P_0), de telle manière qu'il reste tangent à la surface (Σ), et en l'assujettissant à une condition continue quelconque C. Dans chacune de ses positions, le plan (P) coupe, au moins partiellement, la surface (S)

suivant un cercle Γ , dont deux points, réels ou imaginaires, appartiennent à l'une des courbes Γ_0, Γ'_0 . Ces deux points appartiennent aussi à la droite D , commune aux plans (P) et (P_0) .

Si l'on rapproche indéfiniment le plan (P) du plan (P_0) , la droite D tend vers une position limite D_0 [caractéristique du plan (P_0)]; cette droite D_0 est simplement assujettie à passer par le point de contact de (P_0) et de (Σ) , puisque la condition C est arbitraire. Je puis donc supposer que D_0 ne contient aucun des points l, m, \dots, p , à moins que l'un de ces points ne soit justement le point de contact de (P_0) et de (Σ) .

Mais, si cette dernière circonstance se présente, quel que soit le plan (P_0) , c'est que tous les points de (Σ) appartiennent à (S) ; ces deux surfaces sont donc confondues, et les plans qui déterminent dans (S) des sections circulaires sont ses plans tangents. Chacun des cercles de (S) est donc évanouissant; autrement dit (S) admet deux systèmes de génératrices isotropes et ne peut être qu'une sphère.

Écartons ce cas. Le cercle Γ , ai-je dit, coupe la droite D en deux points qui appartiennent au cercle Γ_0 ou à la courbe Γ'_0 , et ces points se trouvent sur la droite L . Quand le plan (P) vient se confondre avec le plan (P_0) , le cercle Γ tend vers le cercle Γ_0 ; les deux points en question deviennent à la limite les points d'intersection de Γ_0 et de L_0 et sont, je l'ai supposé, distincts de tous les points l, m, \dots, p . En vertu de la continuité, cela ne peut avoir lieu que si, pour une position (P) quelconque, ces deux points appartiennent à Γ_0 et non à Γ'_0 .

La conclusion est donc celle-ci : les deux cercles Γ_0 et Γ ont deux points communs i et i' . Les plans tangents à (S) en chacun de ces deux points sont déterminés par les tangentes aux cercles Γ_0 et Γ_1 ; il est donc clair, par

raison de symétrie, que les normales à (S) aux points i et i' se rencontrent.

Mais les deux points i et i' sont *quelconques* sur (S) : en effet, ce sont les points communs à (S) et à deux plans (P_0) et (P) , dont chacun est doublement indéterminé. On arrive donc à cette conclusion que les normales à (S), en deux quelconques de ses points, se rencontrent.

Cette propriété définit bien une sphère, car elle revient à celle-ci : toutes les normales à (S) passent par un point fixe.